

# 量子场论笔记

---

作者：王俊

时间：2025年2月27日



# 目录

<b>Chapter 1</b>	<b>Introduction</b>	<b>Page 1</b>
1.1	什么是 QFT? 为什么要学 QFT?	1
1.2	历史回顾-相对论波动力学	2
1.3	Dirac 方程 Dirac 方程的成就 — 3	3
1.4	相对论量子力学的局限性 因果律破坏 — 5	5
1.5	量子场论的诞生 一维弦的例子 — 5	5
1.6	经典场论 Lagrangian 密度 — 6 • Lorentz 变换 — 7 • 标量场的 Lagrangian — 9 • Euler-Lagrange 方程 — 10	6
1.7	对称性与 Nöther 定理 对称性 — 12 • Nöther 定理 — 14	12
<b>Chapter 2</b>	<b>标量场的正则量子化</b>	<b>Page 19</b>
2.1	量子化 Klein-Gordon 场	19
2.2	Klein-Gordon 场的 Hamiltonian	20
2.3	量子态	22
2.4	Heisenberg 绘景	23
2.5	因果律	24
2.6	Klein-Gordon 场的传播子	26
<b>Chapter 3</b>	<b>Dirac 场</b>	<b>Page 27</b>
3.1	Lie 群	27
3.2	Lorentz 群的旋量表示	28
3.3	Dirac 场的 Lagrangian	31
3.4	Chirality	32

3.5	Dirac 方程的解	33
	Dirac 方程的平面波解 — 33 • Dirac 旋量的正交性和完备性 — 36	
3.6	Dirac 双线性量与 Chiral Symmetry	37
3.7	Dirac 场的量子化	39
	等时对易关系量子化 — 40 • 反对易子量子化 — 41	
3.8	Dirac 场的传播子	46

## Chapter 4 时空对称性与 $CPT$ 定理 Page 49

4.1	Lorentz 变换	49
4.2	经典场论中的 $P$ 和 $T$ 对称性	50
	空间反演 — 50 • 时间反演 — 51	
4.3	量子 Poincaré 群及其李代数	51
	广义的 Poincaré 变换 — 53 • 单粒子态在 $P$ 和 $T$ 作用下的性质 — 55	
4.4	单粒子态和场算符的 Lorentz 变换	56
	Dirac 场的 Lorentz 变换 — 57	
4.5	场算符在空间反演下的行为	57
	Klein-Gordon 场在空间反演下的行为 — 57 • Dirac 场在空间反演下的行为 — 57 • Dirac 场的双线性型在空间反演变换下的变换 — 58	
4.6	场算符的时间反演变换	59
4.7	电荷共轭变换	61
	Dirac 方程的电荷共轭变换 — 61 • 场算符的电荷共轭变换 — 62	

## Chapter 5 矢量场的量子化 Page 65

5.1	有质量矢量场	65
5.2	电磁场量子化	69
5.3	Feynman 传播子	72

## Chapter 6 相互作用场论 Page 75

6.1	$S$ 矩阵	76
	老式微扰论 — 81	
6.2	相互作用绘景	82
6.3	Wick 定理	84
	$\phi^4$ 理论 — 85	
6.4	Scalar QED	87
6.5	QED 的 Feynman 规则	88
	Yukawa 理论 — 89	
6.6	Spinor QED	90

---

6.7	Compton Scattering	92
6.8	Green Function 的微扰展开	93
	Dyson-Schwinger 方程 — 94 • Gell-Mann-Low 公式 — 96	

---

**Chapter 7**    **重整化与紫外发散** \_\_\_\_\_ **Page 101** \_\_\_\_\_

7.1	Feynman 参数化	101
7.2	重整化耦合常数	103
7.3	重整化的微扰论	103
7.4	维数正规化	104

---

**Chapter 8**    **量子场论专题** \_\_\_\_\_ **Page 105** \_\_\_\_\_

8.1	Cutkosky 规则	105
-----	-------------	-----



# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 什么是 QFT? 为什么要学 QFT?

我们最先接触到的场 (field) 的概念来源于电磁场  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ . 场是从离散到连续.

我们知道电磁场的能量  $\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ . 而电磁场的 Lagrangian  $L = T - V, L = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$  为 Lorentz 不变量.

电磁场量子化的量子为光子, 在量子力学中

$$\mathbf{p}, \mathbf{x} \xrightarrow{\text{QM}} \hat{p}, \hat{x} \quad (1.1)$$

而在量子化电磁场中

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \xrightarrow{\text{QM}} \hat{E}, \hat{B} \quad (1.2)$$

我们将场提升为算符.

**Claim 1.1.1** QFT 比单粒子 QM 复杂的多

将 Classical Field Theory 量子化, 含有无穷多自由度.

**Claim 1.1.2** QFT =  $\infty$  多个谐振子的集合.

**Claim 1.1.3** 粒子是将场激发后对应的量子.

**Claim 1.1.4** QFT 可用来描述粒子数改变的过程.

一些用量子场论解决的问题:

**Example 1.1.1** (原子的自发辐射)

初态  $e \rightarrow$  末态  $e + \gamma$ .

$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m} + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m}$ , 自发辐射的振幅  $\propto \langle e + \gamma | e \hat{p} \hat{A} | e \rangle$ , 前后粒子数改变,  $\hat{A}$  是 Hermite 算符, 可用  $a, a^\dagger$  展开

**Example 1.1.2** (原子核的  $\beta$  衰变)

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , 衰变产生的电子具有连续能谱, 因此产物含有中微子.

Fermi 提出 4 Fermions 相互作用.  $\mathcal{L} \propto \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \psi_4$ .

**Claim 1.1.5** QFT 具有非常广泛的应用

从高能物理、核物理、原子物理、凝聚态物理  $\rightarrow$  宇宙学 (inflation).

**Claim 1.1.6** QFT = SR(1905 Einstein  $E = mc^2$ ) + QM( 1925 Heisenberg, Bohr, Schrödinger  
 $\langle \Delta x \rangle \langle \Delta p \rangle \geq \frac{\hbar}{2}$ )**Claim 1.1.7** QFT 具有强大的预言能力

电子的反常磁矩, 理论与实验高度符合.

## 1.2 历史回顾—相对论波动力学

De Broglie Schrödinger Klein Gordon Dirac, 等人都对相对论波动力学做出了贡献, 但是相对论波动力学遇到了以下几个问题:(1) 负能解问题;(2) 负概率问题;(3) 因果律问题.

**Example 1.2.1** (Klein Gordon 方程)

$$\left[ \square^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (1.3)$$

Einstein 提出了光量子假设 (1905)  $E = h\nu$ , 可以引入约化  $\hbar : \hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $E = \hbar\omega$

De Broglie 提出了物质波假设 (1923) (SR, 光量子), 对于自由电子我们有  $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ , 可以用波函数描述, 平面波  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$ . 若用 4-矢量  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , 则平面波为  $e^{-ik \cdot x}$

根据物质波假设  $p^\mu \parallel k^\mu$ , 由于光量子  $E = \hbar\omega$ ,  $\implies p^\mu = \hbar k^\mu$ .  $p^\mu$  代表粒子属性,  $k^\mu$  代表波的属性,  $\hbar$  将粒子和波联系起来.  $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$

NRQM :  $E = \frac{p^2}{2m}$ ,  $\implies \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , 从量纲分析我们可以得出如下的代换以及波动方程.

$$E = \hbar\omega \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \rightarrow -i\nabla \implies i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (1.4)$$

对于相对论色散关系

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \implies E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0$$

做代换

$$\implies \left( -\hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar \nabla^2 c^2 - m^2 c^4 \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \implies \left[ \square^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (1.5)$$

其中  $\square^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu$  是 Lorentz invariant.

令  $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}$ ,  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ,  $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ , 出现了负能解问题.

$E$  和  $p$  的色散关系呈现出双曲线, 正能解与负能解之间存在能隙. 在经典力学中不会相互影响, 但是在量子力学中可以发生能级跃迁, 使得粒子不稳定并且能量可以为负无穷, 没有一个能量最低的基态.

除此之外, K-G 方程还存在负概率问题, 对于 NRQM 我们有概率流守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 - \nabla \cdot \left( \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right) = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.6)$$

但是对于 K-G 方程, 我们有

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.8)$$

此时概率流可能为负, 即负概率问题.

## 1.3 Dirac 方程

对于 Schrödinger 方程, 我们有

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (1.9)$$

对于相对论性的粒子我们有  $H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ , K-G 方程是采取平方的形式, 出现了负概率的问题, Dirac 提出了一阶的相对论性波动方程, 此时  $\psi$  不在是一维的波函数, 而是列矢量, 对应的算符也变为矩阵.

Dirac 将  $\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  用矩阵表示为

$$-i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m c^2 \quad (1.10)$$

将上式代回相对论色散关系我们有

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \{ \alpha^i, \alpha^j \} \partial_i \partial_j \psi - i\hbar m c^3 \sum_{i=1}^3 \{ \alpha^i, \beta \} \partial_i \psi + m^2 c^4 \beta^4 \quad (1.11)$$

与 K-G 方程比较我们得到对  $\boldsymbol{\alpha}, \beta$  的要求

$$\{ \alpha^i, \beta \} = 0, (i = 1, 2, 3), \{ \alpha^i, \alpha^j \} = 2\delta^{ij} \mathbf{1}, \alpha^{i^2} = \beta^2 = \mathbf{1} \quad (1.12)$$

此时方程的解为 spinor, 可以引入 Dirac 矩阵简化方程

$$\gamma^0 \equiv \beta, \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha} \implies \gamma^\mu = \{ \gamma^0, \boldsymbol{\gamma} \} \quad (1.13)$$

Dirac 方程则变为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.14)$$

可以得到概率密度以及概率流

$$\rho = \psi^* \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0, \mathbf{j} = c\psi^* \boldsymbol{\alpha} \psi \quad (1.15)$$

此时的概率密度是正定的, 就解决了负概率问题.

### 1.3.1 Dirac 方程的成就

**Example 1.3.1** (Dirac 方程正确预言了电磁的磁矩)

利用最小耦合代换我们可以得到

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - e\phi + mc^2\beta)\psi \quad (1.16)$$

取低能极限将  $\psi$  改写为 2 分量波函数, 并分离出静能有

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad (1.17)$$

带入 Dirac 方程我们可以得到

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - e\phi + mc^2\beta) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad (1.18)$$

其中  $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ , 代入可得

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} - e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

即

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\chi - e\phi\varphi \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\varphi - e\phi\chi - 2mc^2\chi \end{aligned} \quad (1.20)$$

在非相对论极限下上式第二个方程中的  $i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}$  (代表动能项) 以及  $e\phi\chi$  (势能) 可忽略, 从而我们可以得到

$$\chi = \frac{1}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\varphi \quad (1.21)$$

代入前式的第一个方程我们可以得到

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2 \varphi - e\phi\varphi \quad (1.22)$$

利用 Pauli 矩阵的恒等式  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  我们可以得到

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \quad (1.23)$$

考虑  $\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}$  作用到  $\varphi$  上在坐标表象下有

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p})_k \varphi &= -i\hbar \varepsilon_{ijk} (\partial_i (A_j \varphi) + A_i \partial_j \varphi) \\ &= -i\hbar \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi - \underbrace{i\hbar \varepsilon_{ijk} (A_j \partial_i \varphi + A_i \partial_j \varphi)}_{=0 \text{ 对称} \times \text{反对称}} \\ &= -i\hbar \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi = -i\hbar (\nabla \times \mathbf{A})_k \varphi = -i\hbar \mathbf{B}_k \varphi \end{aligned} \quad (1.24)$$

因此我们有

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \varphi + \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - e\phi\varphi \quad (1.25)$$

电子在外加磁场下的能量为  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$  因此电子的磁矩为

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{e}{m} \mathbf{S} \quad (1.26)$$

其中  $\mathbf{S}$  为电子的自旋.

**Example 1.3.2** (解释氢原子能谱)

从 K-G 方程我们可以得出氢原子能级的相对论修正

$$E_{nl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left[n-l-\frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2}\right]^2}}} \simeq mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right] \quad (1.27)$$

带入  $n, l$  的值, 与实验不符.

利用 Dirac 方程我们可以得出对氢原子能级的相对论修正

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right] \quad (1.28)$$

与 K-G 方程得出的解最大的差别就是第三项中的轨道角动量子数变为了总角动量子数  $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , 与实验符合的很好, 这也说明了电子的自旋为  $\frac{1}{2}$ .

**Claim 1.3.1** Dirac 方程的局限性

从 Dirac 方程的解我们可以得出对于这样两个氢原子的状态  $2s_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{1}{2}}$  的能量应当是一致的, 但是实验上发现二者之间有细微的差别, 也就是所谓的 Lamb 位移. 由此导致了电子反常磁矩的发现.

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (1.29)$$

## 1.4 相对论量子力学的局限性

### 1.4.1 因果律破坏

利用时间演化算符我们可以得到一个粒子从一个时空点演化到另一个时空点的概率振幅

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle \quad (1.30)$$

i) 非相对论情况  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ , 当  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > t$  时,  $U(t) \neq 0$

ii) 相对论情况  $H = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$ , 当  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 > t$  时,

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 - (t-t_0)^2}} \neq 0 \quad (1.31)$$

由于 Lorentz 不变性的要求, 我们必须保证因果律, 这就必须引入反粒子, 从而我们需要粒子数不守恒的量子力学, 也就是量子场论.

## 1.5 量子场论的诞生

### 1.5.1 一维弦的例子

考虑一个一维的弦, 有  $N$  个节点, 节点之间的距离为  $l$  总长为  $S$ , 满足  $Nl = S$ . 每个节点位移为  $\eta_j$ . 我们可以写出动能、势能以及 Lagrangian.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \quad (1.32)$$

取连续极限  $S = Nl, N \rightarrow \infty, l \rightarrow 0$ . 可以得到 Lagrangian

$$L = T - V = \int_0^S dx \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.33)$$

利用 E-L 方程我们可以得出波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.34)$$

我们可以利用 Fourier 展开将其在写成动量空间的形式

$$L = \frac{L_0}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{q}_k^2(t) - \omega_k^2 q_k^2(t) \} \quad (1.35)$$

利用 E-L 方程我们可以得到

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k^2(t) = 0 \quad (1.36)$$

也就是简谐振子的运动方程. 我们可以得到正则动量

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{L_0}{2} \dot{q}_k \quad (1.37)$$

对应的 Hamiltonian 为

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{p_k^2}{L_0} + \frac{L_0}{4} \omega_k^2 q_k^2 \right) \quad (1.38)$$

利用正则对易关系量子化谐振子

$$[q_j(t), p_k(t)] = i\hbar \delta_{ij}, [q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0 \quad (1.39)$$

利用升降算符我们可以得到

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.40)$$

对应的能量本征态 (也就是所谓的 Fock 态) 为

$$|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \quad (1.41)$$

其中  $n_k$  为第  $k$  个能级上的粒子数, 也就是说能量本征态由, 多个不同能级的粒子构成, 对应的能量为所有粒子的能量相加.

从而我们可以说 QFT 就是将从前讨论的升降算符重新诠释为粒子的产生湮灭算符, 粒子时量子场激发时对应的量子.

如果考虑粒子的基态, 我们将基态定义为

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (1.42)$$

从而可以得到基态能量为无穷大, 这也就是所谓的紫外发散.

## 1.6 经典场论

### 1.6.1 Lagrangian 密度

我们接下来对经典场论进行一个回顾, 我们所熟知的经典场论有两个就是电磁场理论和广义相对论.

对于经典场论我们用场的 Lagrangian 密度来描述, 在分析力学中我们定义了粒子运动的 Lagrangian, 对于场我们定义场的 Lagrangian 密度,  $\mathcal{L}$ , 与 Lagrangian 的关系为

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t). \quad (1.43)$$

在量子场论中通常简称为 Lagrangian.

那么我们的作用量用 Lagrangian 表示为

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (1.44)$$

### Claim 1.6.1 Lagrangian 密度的要求

我们要求作用量在 Lorentz 变换下不变, 即  $S$  是 Lorentz scalar, 而积分测度  $d^4x$  也是 Lorentz 不变的, 因此  $\mathcal{L}$  也是 Lorentz 不变的. 我们考虑的系统都是么正演化的, 不会随着时间衰减, 因此我们要求  $S$  与  $\mathcal{L}$  都是实的.

## 1.6.2 Lorentz 变换

对于 Lorentz 变换, 我们定义一个 Lorentz 矢量  $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$ , 在 Lorentz 变换下  $x^\mu$  的变换为

$$x^\mu \xrightarrow{\Lambda} x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.45)$$

其中的  $\Lambda^\mu_\nu$  是 Lorentz 变换的表示矩阵, Lorentz 包含 Lorentz boost 和旋转.

### Example 1.6.1 (一些 Lorentz 变换的矩阵)

对于 Lorentz 矢量在空间中的旋转我们可以写成如下形式, 以  $x$  轴为例.

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

对于  $x$  方向的 Lorentz boost 我们可以写成如下形式

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

其中  $\beta$  表示快度 rapidity,

$$\beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \quad (1.48)$$

## Lorentz 变换矩阵的性质

考虑  $x^\mu$  的无穷小变化  $x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu$ , 也就是四维时空中的距离我们有

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.49)$$

其中的  $g_{\mu\nu}$  为 Minkowski 度规,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

在 Lorentz 变换下  $ds^2$  保持不变, 即

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \quad (1.51)$$

利用上式我们有

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (1.52)$$

而  $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ , 我们有

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \quad (1.53)$$

可以写成矩阵乘法的形式

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = (\Lambda^T)^\rho_\mu g_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \implies \Lambda^T g \Lambda = g \quad (1.54)$$

从而我们有 Lorentz 变换矩阵矩阵的保度规条件

#### Corollary 1.6.1 Lorentz 变换矩阵的保度规条件

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \quad (1.55)$$

对上式取行列式我们有

$$\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det g \implies \det \Lambda^T \det g \det \Lambda = \det g \implies \det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \quad (1.56)$$

从而我们有

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (1.57)$$

对于保度规条件我们取  $\rho = \sigma = 0$ , 有

$$\sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\mu} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\mu = 1 \implies (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 = 1 \quad (1.58)$$

因此我们有

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \text{ or } \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (1.59)$$

此外我们也能得到 Lorentz 变换矩阵的逆矩阵

$$g^{\rho\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} g^\alpha = \delta_\sigma^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu \Lambda_\sigma^\nu \implies (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu = g^{\rho\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu. \quad (1.60)$$

#### Example 1.6.2 (Lorentz 变换下标量、矢量以及张量的变换)

- $x_\mu x^\mu \rightarrow x'_\mu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu x_\rho \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \delta_\nu^\rho x_\rho x^\nu$
- $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$
- $T^{\mu\nu} \rightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu T^{\rho\sigma}$
- $T'_\nu \rightarrow T'_\nu = \Lambda_\rho^\nu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu T^\rho_\sigma$ .

**Claim 1.6.2** 一些记号

$$\begin{aligned}
x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}), p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \mathbf{p}) \\
x_\mu &= g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{x}), p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -\mathbf{p}) \\
p^2 &= E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \\
V \cdot W &= V^\mu W_\mu = V_\mu W^\mu = V_\mu g^{\mu\nu} W_\nu, (V \cdot W)^2 = V^r W_r V^\nu W_\nu.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

**场在 Lorentz 变换下的行为**

对于场, 我们可以按照 Lorentz 变换的性质进行分类. 我们采用主动观点.

**Example 1.6.3** (标量场的变换)

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x') \implies \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{1.62}$$

**Example 1.6.4** (矢量场的变换)

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(x) = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \implies A'^\mu(x) = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(\Lambda^{-1}x) \tag{1.63}$$

**Example 1.6.5** (张量场的变换)

$$T^{\mu\nu}(x) \rightarrow T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu T^{\rho\sigma}(x) = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu T^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x') \implies T'^{\mu\nu}(x) = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu T^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x) \tag{1.64}$$

**Example 1.6.6** (Dirac 场 (spinor 场) 的变换)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x') \implies \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \tag{1.65}$$

其中  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  称为 Lorentz 变换的 spinor 表示.

**1.6.3 标量场的 Lagrangian**

利用  $\phi(x)$  构造标量场的 Lagrangian 密度, 利用  $\phi(x)$  我们可以得到以下的一些满足 Lorentz 不变的项.

$$\phi(x), \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x), \phi(x)^n, \dots \phi(x) \square \phi(x), \dots \tag{1.66}$$

其中  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  是 D'Alembert 算符. 一项虽然满足 Lorentz 不变性, 但是不是定域的, 我们只考虑定域项因此  $\partial_\mu$  只出现正幂次.

由于  $\mathcal{S}$  是一个无量纲的标量, 而积分测度  $[d^4x] = -4$ , 因此我们要求  $[\mathcal{L}] = 4, \mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ , 其中  $\mathcal{K}$  是动能项,  $\mathcal{V}$  是势能项. 对于自由场论只有动能项, 最多包含二次项可能由如下的项构成

$$\phi^2, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*, \partial_\mu \phi A^\mu, \partial_\mu \phi A^\mu, -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \dots \tag{1.67}$$

对于势能项为相互作用项至少含有三次项, 例如

$$\phi^3, \phi^4, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ (QED)}, \partial_\mu\phi A^\mu\phi^* \text{ (scalar QED)}, (A_\mu A^\mu)^2 \text{ (QCD)}, \partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu h_\alpha h^{\alpha\beta} \text{ (GR)}. \quad (1.68)$$

对于自由的标量场我们选取  $\mathcal{L}$  为如下形式

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + b\phi^2 \quad (1.69)$$

由于  $\mathcal{L}$  我们总可以乘一个常数使得某一项的系数为量纲常数, 因此我们规定  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$  前的系数为无量纲常数, 即

$$[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi] = [\mathcal{L}] = 4 \implies [\phi] = 1 \quad (1.70)$$

因此  $[b] = 2, b = m^2$  从而我们有自由标量场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (1.71)$$

$\frac{1}{2}$  以及相对的符号是一种方便, 使得我们可以得到对应的  $K - G$  方程以及正定的 Hamiltonian.

对于经典力学可以定义共轭动量以及 Hamiltonian

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H = p\dot{q} - L \quad (1.72)$$

类似的对于场我们可以定义共轭动量密度以及 Hamiltonian 密度 (以后简称 Hamiltonian)

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}, \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.73)$$

从而

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

#### 1.6.4 Euler-Lagrange 方程

对于经典力学从最小作用量原理出发我们有 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.75)$$

对于场我们有

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\partial_\mu\phi \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\delta\phi \right] \text{ (变分}\delta\text{与导数}\partial_\mu\text{可交换)} \end{aligned} \quad (1.76)$$

对于第二项我们可以得到 (分部积分)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\delta\phi = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad (1.77)$$

从而我们有

$$0 = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \right] \quad (1.78)$$

对于第三项利用 Gauss 定理我们有

$$\int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \Big|_{\partial V} = 0, \text{ (定域场无穷远边界处为 0)} \quad (1.79)$$

最终我们得到

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi \quad (1.80)$$

由于  $\delta\phi$  任意, 因此我们有 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (1.81)$$

对不同的场应用 Euler-Lagrange 方程

**Example 1.6.7** (自由标量场)

Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial_\alpha \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\alpha \phi + \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \frac{\partial(\partial^\alpha \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \\ &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu \partial^\alpha \phi + \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi g^{\alpha\mu} = \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (1.83)$$

带入 Euler-Lagrange 方程我们有

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (1.84)$$

**Example 1.6.8** ( $\phi^4$  理论)

Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.85)$$

同上我们有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (1.86)$$

带入 Euler-Lagrange 方程我们有

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{6} \phi^3 \quad (1.87)$$

**Example 1.6.9** (复标量场)

Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.88)$$

对于  $\phi^*$  我们有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \implies (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (1.89)$$

对于  $\phi$  我们有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^* \implies (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^* = 0 \quad (1.90)$$

**Example 1.6.10** (电磁场)

Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \quad (1.91)$$

对于  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  我们有

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 2F^{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \\ &= 2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu = 2(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\frac{\partial (\partial_\mu A_\nu)}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta, \quad \frac{\partial (\partial^\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \quad (1.93)$$

带入 Euler-Lagrange 方程我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} &= -j^\beta, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \partial^\mu A^\nu + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\mu A_\nu - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \partial^\mu A^\nu - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial^\alpha A^\beta + \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha - \partial^\beta A^\alpha) = -\partial^\alpha A^\beta + \partial^\beta A^\alpha = -F^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.94)$$

带入 Euler-Lagrange 方程我们有

$$\partial_\mu F^{\mu\beta} = j^\beta \quad (1.95)$$

也就是 Maxwell 方程.

## 1.7 对称性与 Nöther 定理

### 1.7.1 对称性

#### Definition 1.7.1: 对称性

系统的对称性 (Symmetry) 指在某个对称变换下, 系统的动力学保持不变.

#### Note:-

关于对称性我们可以从两个视角看:(1) 运动方程保持不变;(2) 作用量保持不变. 可以从这两个方面来看一个系统是否具有对称性.

**Example 1.7.1** ( $\mathcal{L}_{K-G}$  的 Lorentz 不变性)

我们以 K-G 理论为例子分析它的 Lorentz 对称性. 在 Lorentz 对称性下  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , 对应的标量场的变换为

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x') \implies \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.96)$$

偏导数项的变换为

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (y = \Lambda^{-1}x) \quad (1.97)$$

对应的动能项变化为

$$(\partial_\mu \phi(x))^2 \rightarrow g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi'(x) \partial_\nu \phi'(x) = g^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu \partial_\rho \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.98)$$

利用  $\Lambda^T g \Lambda = g$ , 我们有

$$g^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu = g^{\rho\sigma} \quad (1.99)$$

从而动能项为

$$g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) \implies \mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \quad (1.100)$$

也就是说  $\mathcal{L}_{\text{K-G}}$  在 Lorentz 变换下保持不变. 这是从作用量的视角来看, 接下来我们从运动方程的视角来看. 运动方程的变化为

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) \rightarrow (\partial^2 + m^2)\phi'(x) = (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.101)$$

同上我们有

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) &= (g^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu \partial_\rho \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) + m^2 \phi(\Lambda^{-1}x)) \\ &= (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (1.102)$$

#### Note:-

对称性还可以从另一个方面来分类:(1) 时空对称性  $x \rightarrow x' = f(x)$ ,  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = ?$ ;(2) 内禀对称性.

#### Example 1.7.2 (对称性的例子)

- 时空对称性:
  - 时空平移对称性  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$
  - Lorentz 对称性 + 时空平移对称性 = Poincaré 对称性.
  - 标度不变性
- 内禀对称性
  - $U(1)$
  - $SU(2)$
  - $SU(3)_c$

**Example 1.7.3** (内禀对称性的例子)

复 K-G 场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.103)$$

考虑一个相位变换

$$\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \phi'^*(x) = e^{-i\alpha} \phi^*(x) \quad (1.104)$$

显然对应的 Lagrangian 保持不变, 即  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x)$ .

**Note:-**

对称性还可以分为连续对称性 (我们上述提到的都是连续对称性) 与分立对称性 (如空间反演).

**1.7.2 Nöther 定理****Theorem 1.7.1** Nöther 定理

如果一个系统具有某种连续对称性并且运动方程满足时, 则该系统存在一个相应的守恒流.

为了证明 Nöther 定理我们首先介绍一些概念和有用的引理.

**Definition 1.7.2: 对于同一坐标点函数的变化**

考虑被动视角的坐标变换

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \quad (1.105)$$

对应的函数的变换为

$$f(x) \rightarrow f'(x') = f(x) + \delta f(x) \quad (1.106)$$

其中的  $\delta f(x)$  为物理点函数的变化, 我们有

$$\begin{aligned} \delta f &= f'(x') - f(x) = f'(x + \delta x) - f(x) \\ &\simeq f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f'(x) + \mathcal{O}(\delta x^2) \end{aligned} \quad (1.107)$$

我们定义

$$\delta_0 f = f'(x) - f(x) \quad (1.108)$$

为同一坐标点函数的变化. 因此我们有

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \quad (1.109)$$

**Lenma 1.7.1** 矩阵的恒等式

$$\det(M) = e^{\text{Tr} \ln(M)} \quad (1.110)$$

**Lenma 1.7.2** 四维空间测度的变分

$$\delta d^4x = (\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x \quad (1.111)$$

**Proof:** 在坐标变换下

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \implies \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu \quad (1.112)$$

对应的积分测度变换为

$$d^4x' = d^4x \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = d^4x \det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) \quad (1.113)$$

利用前述的矩阵恒等式我们有

$$\det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) = e^{\text{Tr} \ln (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu)} = 1 + \text{Tr} \ln (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) = 1 + \text{Tr} (\partial_\nu \delta x^\nu) = 1 + \partial_\nu \delta x^\nu \quad (1.114)$$

从而我们有

$$d^4x' = d^4x (1 + \partial_\nu \delta x^\nu) \implies \delta d^4x = (\partial_\nu \delta x^\nu) d^4x \quad (1.115)$$

☺

**Example 1.7.4** ( $d^4x = (\partial_\nu \delta x^\nu) d^4x$ )

- 对于时空平移

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \delta x^\mu = a^\mu \partial_\mu \delta x^\mu = 0 \quad (1.116)$$

- Lorentz 变换

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \Lambda^T g \Lambda = g \implies \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (1.117)$$

对应的无穷小变换为

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu, \partial_\mu \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} \partial_\mu x_\nu = \omega^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.118)$$

- 也就是说对于 Poincaré 变换

$$\delta d^4x = 0. \quad (1.119)$$

- 标度变换

$$x' = e^\lambda x, \delta x = \lambda x, \partial_\mu \delta x^\mu = \frac{\partial (\lambda x^\mu)}{\partial x^\mu} = 4\lambda. \quad (1.120)$$

接下来我们证明 Nöther 定理.

**Proof:** 若系统具有某种对称性则在对应的对称变换下, 作用量的变分为 0

$$0 = \delta \mathcal{S} = \delta \int d^4x \mathcal{L} = \int (\delta d^4x + \delta \mathcal{L} d^4x) \quad (1.121)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \delta_0 \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \partial_\mu \phi + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\ &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta_0 \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \end{aligned} \quad (1.122)$$

上式第二行第一项为零 (E-L 方程), 带入  $\delta S$  为

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left[ (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left( \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) \end{aligned} \quad (1.123)$$

取

$$j^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \quad (1.124)$$

则在任意小的时空体积下都满足

$$\delta \mathcal{S} = \int d^4x \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.125)$$

所以

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.126)$$

这实际上就是守恒流方程. ⊙

上述的守恒流我们是用坐标点场的变换来表示的, 一般情况下用物理点场的变换来表示更加方便, 即

$$\begin{aligned} j^\mu &= \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{L})} \delta_0 \phi \\ &= \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi - \delta x^\nu \partial_\nu \phi) \\ &= \left( \mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \end{aligned} \quad (1.127)$$

### Definition 1.7.3: 守恒荷

对于  $\partial_\mu j^\mu$  在时空上积分有

$$0 = \int d^4x \partial_\mu j^\mu = \int dx^0 \int d^3\mathbf{x} (\partial_0 j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j}) = \int dx^0 \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t) \quad (1.128)$$

由于时间积分的任意性我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.129)$$

定义守恒荷, 也就是 Nöther 荷

$$Q(t) = \int d^3\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t). \quad (1.130)$$

从而有荷守恒

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0. \quad (1.131)$$

### Example 1.7.5 (时空平移变换的 Nöther 流)

对于时空平移变换

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad \delta x^\mu = a^\mu, \quad \delta \phi = 0 \quad (1.132)$$

故

$$\delta_0 \phi = \delta \phi - \delta x^\mu \partial_\mu \phi = -a^\mu \partial_\mu \phi \quad (1.133)$$

由于  $\delta x^\mu = a^\mu$  的任意性, 守恒流中  $\delta x^\mu$  前的系数为守恒流

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.134)$$

Nöther 荷为

$$P^\nu = \int d^3 \mathbf{x} T^{0\nu} \quad (1.135)$$

当  $\nu = 0$  时有

$$P^0 = \int d^3 \mathbf{x} T^{00} = \int d^3 \mathbf{x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} \right) = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H} \quad (1.136)$$

也就是说  $T^{00}$  为能量密度. 当  $\nu = i$  时有

$$P^i = \int d^3 \mathbf{x} T^{0i} = \int d^3 \mathbf{x} \pi \partial^i \phi \quad (1.137)$$

代表着系统的动量.

### Example 1.7.6 (Shift Symmetry)

考虑无质量的 K-G 场

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \quad (1.138)$$

$\phi$  的变换为

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \alpha, \quad \partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi' = \partial_\mu \phi \quad (1.139)$$

物理点的场变化为

$$\delta \phi = \phi' - \phi = \alpha, \quad \delta x^\nu = 0 \quad (1.140)$$

对应的守恒流为

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \alpha \quad (1.141)$$

守恒流方程为

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad (1.142)$$

### Example 1.7.7 ( $U(1)$ Symmetry)

对于复标量场

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1.143)$$

$U(1)$  变换下场变换为

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^* \quad (1.144)$$

场在物理点的变化为

$$\delta \phi = i\alpha \phi, \quad \delta \phi^* = -i\alpha \phi^* \quad (1.145)$$

对应的守恒流为

$$j^\mu = i(\partial^\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad (1.146)$$

守恒荷为

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0 = i \int d^3\mathbf{x} (\dot{\phi}^* \phi - \phi^* \dot{\phi}) \quad (1.147)$$

当我们考虑电磁相互作用时, 相互作用项为  $j^\mu A_\mu$ , 此时  $U(1)$  对称性对应的守恒荷就是电荷, 也就是说  $U(1)$  对称性对应电荷守恒.

# Chapter 2

## 标量场的正则量子化

### 2.1 量子化 Klein-Gordon 场

Klein-Gordon 场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.1)$$

对应的共轲动量为

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \dot{\phi} \quad (2.2)$$

Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.3)$$

在量子力学中我们量子化的方式是将  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{p}$  提升为算符, 并且施加正则对易关系

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}, [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (2.4)$$

同样的对于场论, 我们也可以将  $\phi$  和  $\pi$  提升为场算符, 并且施加正则对易关系

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = if(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.5)$$

其中  $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  是  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  的函数, 这是由于平移不变性所要求的. 我们求的是一个等时对易关系, 因为在量子力学中时间只是一个参量并不是动力学变量. 我们并不知道  $f$  具体表达式, 但我们可以通过量子力学中量子化的类比, 猜想它具有  $\delta$  函数的形式即

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6)$$

其他的对易子为零

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (2.7)$$

类比量子力学中的谐振子我们也可以将场算符用产生湮灭算符展开, 即

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad \pi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.8)$$

我们可以对第二部分令  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  可以得到

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad \pi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.9)$$

对于  $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger$  我们有对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0, [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.10)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \left(-\frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \times [a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \left(-\frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \times ([a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{q}}^\dagger]) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \left(-\frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \times (-2) \cdot (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

与我们的假设一致, 这至少说明了我们施加的对易关系是自洽的.

## 2.2 Klein-Gordon 场的 Hamiltonian

利用经典场论中的 K-G 场的 Hamiltonian 表达式

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.12)$$

以及标量场的展开式

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad \pi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

可以得到

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \left[ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) + \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger) \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{-\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger) + \frac{\mathbf{p}^2 + m^2}{4\omega_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger) \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{-\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger) + \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger) \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} (2a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + 2a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} (a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0}) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

可以看出积分中正是非相对论量子力学中的谐振子的 Hamiltonian, 也就是说量子场可以看做无穷多个谐振子的集合.

Hamilton 积分中的第二项是个发散项, 求和会出现无穷大, 这不仅是总能量的发散, 能量密度也发散, 考虑  $H$  作用到真空态上

$$H|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0}) |0\rangle = E_{\text{vac}} |0\rangle \quad (2.15)$$

我们将无穷大的这一项记为真空能  $E_{\text{vac}}$ , 一般来说真空能不具备可观测效应, 我们关心的是系统与基态的能量差, 因此我们可以忽略掉它, 之后我们会通过正规编序来处理这个问题. 真空能的存在可以通过 Casimir 效应来证明.

类比非相对论量子力学中谐振子 Hamiltonian 与升降算符的对易关系, 我们可以得到量子场论中的 Hamiltonian 与产生湮灭算符的对易关系

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \cdot (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \\ [\mathcal{H}, a_{\mathbf{p}}] &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (-1) \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \cdot (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

考虑  $H$  作用到  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$  上我们有

$$H a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = [H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] |0\rangle + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} E_{\text{vac}} |0\rangle = (E_{\text{vac}} + \omega_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.17)$$

可以看出  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  使得真空态的能量增加了  $\omega_{\mathbf{p}}$ , 可以认为产生了一个能量为  $\omega_{\mathbf{p}}$  的粒子. 考虑多个产生算符作用在真空态上, 我们可以得到多粒子态

$$H a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle = (E_{\text{vac}} + \omega_{\mathbf{p}_1} + \cdots + \omega_{\mathbf{p}_n}) a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.18)$$

可以看出多个产生算符作用到真空态上确实产生了多个粒子增加的能量为这些粒子的能量之和.

利用经典场论中的动量

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} \pi \nabla \phi \quad (2.19)$$

我们也可以求出量子场论中的动量

$$\begin{aligned} P &= - \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \mathbf{p} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}) (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^{\dagger}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \frac{1}{2} (a_{-\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} - a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} - a_{-\mathbf{p}}^{\dagger} a_{-\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

利用函数的奇偶性我们有

$$P = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}]) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0})) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \quad (2.21)$$

上式最后一个等号同样利用了奇函数积分为零.

与 Hamiltonian 不同的是并没有出现发散项这是因为动量是一个矢量, 可以看做各个方向的矢量互相抵消.

我们也可以将  $P$  作用到  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$  上我们有

$$P a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = [P, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] |0\rangle + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} P |0\rangle = \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.22)$$

可以看出  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  使得真空态的动量增加了  $\mathbf{p}$ , 可以认为产生了一个动量为  $\mathbf{p}$  的粒子. 考虑多个产生算符作用在真空态上, 我们可以得到多粒子态

$$P a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle = (\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n) a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.23)$$

可以看出多个产生算符作用到真空态上确实产生了多个粒子增加的动量为这些粒子的动量之和.

当考虑多粒子态时, 我们需要考虑全同粒子, 这时就有自旋统计定理

### Theorem 2.2.1 自旋统计定理

自旋为半整数的粒子为 Fermion 遵循 Fermi-Dirac 统计, 自旋为整数的粒子为 Boson 遵循 Bose-

Einstein 统计. 分别遵循反对易和对易关系.

可以证明我们所讨论的 Klein-Gordon 场对应的粒子自旋为零 (从 Poincaré 群的不可约表示出发构造角动量算符) 是 Boson, 因此我们所讨论的对易关系是对易关系而不是反对易关系.

## 2.3 量子态

考虑态归一化

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (2.24)$$

从之前的讨论可知, 单粒子态

$$|\mathbf{p}\rangle \propto a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.25)$$

对于非相对论量子力学来说我们有

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \implies |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.26)$$

但是考虑到 Lorentz 不变性, 我们可以得到 QFT 中的态归一化

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.27)$$

在非相对论情况下我们有积分测度

$$\int d^3\mathbf{p} \quad (2.28)$$

在相对论情况下我们有 Lorentz 不变积分测度

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0). \quad (2.29)$$

考虑场算符作用到真空态上我们有

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) |0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

在非相对论近似下我们有

$$\phi(\mathbf{x}) |0\rangle \simeq \frac{1}{2m} \int d^3\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle \sim |\mathbf{x}\rangle \quad (2.31)$$

可以看做是在  $\mathbf{x}$  处产生了一个粒子, 但是由于不确定性关系, 当粒子的位置变得更加精确时, 动量的不确定性会增大伴随着能量的增大, 当能量大过粒子的阈值, 会有正反粒子对产生.

在非相对论量子力学中我们有平面波

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.32)$$

我们也可以在量子场论中做类比

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2.4 Heisenberg 绘景

在 Schrödinger 绘景中态是时间演化的, 而算符是不变的, 而在 Heisenberg 绘景中态是不变的, 而算符是时间演化的. 在两种绘景下算符的期望值相同, 因此

$$\begin{aligned}\langle \psi(t) | O_S | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(0) | O_H | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iHt} O_S e^{-iHt} | 0 \rangle \\ \implies O_H(t) &= e^{iHt} O_S e^{-iHt}\end{aligned}\quad (2.34)$$

因而有 Heisenberg 运动方程

$$i \frac{\partial O_H}{\partial t} = [O_H, H] \quad (2.35)$$

接下来我们在 Heisenberg 绘景下讨论场的运动方程省略下标  $H$ .

### Note:-

Hamiltonian 在两种绘景中是一致的因为  $e^{iHt}$  与  $H$  对易.

利用 Heisenberg 运动方程以及场的 Hamiltonian 我们有

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) &= [\phi(\mathbf{x}, t), \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{2} (\pi(\mathbf{x}', t)^2 + (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2) + m^2 \phi(\mathbf{x}', t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' [\phi(\mathbf{x}, t)^2, \pi(\mathbf{x}', t)] = i\pi(\mathbf{x}, t) \\ i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) &= [\pi(\mathbf{x}, t), \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{2} (\pi(\mathbf{x}', t)^2 + (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2) + m^2 \phi(\mathbf{x}', t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' [\pi(\mathbf{x}, t), (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2 + m^2 \phi(\mathbf{x}', t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' [\pi(\mathbf{x}, t), \nabla \cdot (\phi(\mathbf{x}', t) \nabla \phi(\mathbf{x}', t)) - \phi(\mathbf{x}', t) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}', t) + m^2 \phi(\mathbf{x}', t)] \\ &= i(\nabla^2 - m^2) \phi(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.36)$$

联立上述两个方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) = (\nabla^2 - m^2) \phi(\mathbf{x}, t) \implies (\partial^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.37)$$

也就是说我们利用 Heisenberg 运动方程得到了 Klein-Gordon 方程. 当然这也是必须的.

在 Heisenberg 绘景中场算符为

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.38)$$

利用产生湮灭算符的 Heisenberg 运动方程我们有

$$\begin{aligned}\frac{da_{\mathbf{p}}(t)}{dt} &= -i[a_{\mathbf{p}}, H] = -iE_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \implies a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}} t} \\ \frac{da_{\mathbf{p}}^\dagger(t)}{dt} &= -i[a_{\mathbf{p}}^\dagger, H] = iE_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \implies a_{\mathbf{p}}^\dagger(t) = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}} t}\end{aligned}\quad (2.39)$$

代入前式我们有

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}} t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}} t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot x})\end{aligned}\quad (2.40)$$

**Note:-**

我们称上式第一部分为正频解  $\phi^+$ , 第二部分为负频解  $\phi^-$ . 这时因为第一部分代表正能量的平面波, 第二部分代表负能量的平面波

考虑空间平移算符作用到产生湮灭算符上

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})^n [a_{\mathbf{p}}] = a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \\ e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})^n [a_{\mathbf{p}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

其中

$$\mathbf{A}^n[\mathbf{B}] = \underbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\dots [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \dots ]]]}_{n \uparrow \mathbf{A}}. \quad (2.42)$$

因此

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = e^{iHt - \mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \phi(0) e^{-iHt + \mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = e^{iP\cdot x} \phi(0) e^{-iP\cdot x}. \quad (2.43)$$

## 2.5 因果律

**Claim 2.5.1** 为了保证因果律我们必须引入反粒子.

为

了阐明这一点, 我们将引入  $n$  点关联函数, 用以描述场在不同点的关联. 首先考虑如下的振幅, 可以看做是在  $x$  处产生一个粒子处于真空态的概率, 显然为零.

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iP\cdot x} \phi(0) e^{-iP\cdot x} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle = 0 \quad (2.44)$$

**Note:-**

可以从两个视角来看这个事情:(1)  $\phi(x)$  在  $x$  处产生一个粒子与真空态  $|0\rangle$  正交.(2)  $\phi(x)$  作为一种测量, 对应的 Lagrangian 具有  $Z_2$  对称性  $\phi \rightarrow -\phi$ , 因此真空期望值为 0.

考虑从  $x$  处产生一个粒子处于  $y$  处的振幅

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iP\cdot x} \phi(0) e^{-iP\cdot x} e^{iP\cdot y} \phi(0) e^{-iP\cdot y} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) e^{-iP\cdot(x-y)} \phi(0) | 0 \rangle = D(x-y) \quad (2.45)$$

**Note:-**

也可以从两个视角来看这个事情:(1) 在  $x$  处产生的粒子与  $y$  处产生的粒子之间的关联.(2) 在  $x$  处的测量与  $y$  处的测量之间的关联.

代入场算符表达式有

$$D(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \quad (2.46)$$

对于  $D(x-y)$  考虑类时间隔与类空间隔.

(i)  $x-y$  类时,  $(x-y)^2 > 0$ , 由于 Lorentz 不变性我们可以选取一个参考系使得  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ,  $x^0 - y^0 = t$ , 我们有

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + m^2}t} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-imt} \end{aligned} \quad (2.47)$$

(ii)  $x - y$  类空, 我们可以选取一个参考系使得  $x^0 - y^0 = 0$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$ , 我们有

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2+m^2}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}} \xrightarrow{\rho=-ip} \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2-m^2}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-mr} \end{aligned} \quad (2.48)$$

也就是说两点关联函数在类时间隔和类空间隔下都不为零, 类时间隔不为零这时遵循因果律的, 但是类空间隔下的两点关联函数不为零, 这说明粒子在类空间隔中传播的概率不为零. 这与量子纠缠有关, 并不超光速. 为了真正讨论因果律, 我们必须讨论处于类空间隔的测量是否互相影响. 我们的场论是局域的, 我们要求对于 Bose 型算符, 在类空间隔  $x - y$  中, 在  $x$  处的测量必须和在  $y$  处的测量彼此独立

$$[O_1(x), O_2(y)] = 0, \quad \text{if } (x-y)^2 < 0 \quad (2.49)$$

因此我们讨论场算符的对易子

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} [a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}, a_{\mathbf{q}} e^{-iq\cdot y} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq\cdot y}] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}) = D(x-y) - D(y-x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

在类时间隔

$$D(x-y) - D(y-x) \rightarrow e^{-imt} - e^{imt} \neq 0 \quad (2.51)$$

在类空间隔

$$D(x-y) - D(y-x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}) = 0. \quad (2.52)$$

也就是说对于标量场因果律得到满足.

对于复标量场

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.53)$$

对于复标量场, 我们不需要要求场算符的 Hermite 性, 因此我们可以引入两种类型的产生湮灭算符展开场算符

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}) \quad (2.54)$$

其中  $a_{\mathbf{p}}$  代表湮灭一个动量为  $\mathbf{p}$  的粒子, 而  $b_{\mathbf{p}}$  代表产生一个动量为  $\mathbf{p}$  的反粒子. 我们定义真空态

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad b_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0 \quad (2.55)$$

对于复标量场我们有对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.56)$$

其他对易关系为零. 我们可以计算场算符的对易子

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \propto \langle 0 | a_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = 0 \quad (2.57)$$

但是对于复标量场我们还要考虑到场算符的共轭

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \langle 0 | [\phi(x), \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &\propto \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \end{aligned} \quad (2.58)$$

第一部分代表粒子从  $y$  传播到  $x$ , 第二部分代表反粒子从  $x$  传播到  $y$ , 在类空间隔下彼此相互抵消, 这说明复标量场的因果性是由反粒子的存在保证的.

## 2.6 Klein-Gordon 场的传播子

考虑外加源的 Klein-Gordon Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + j \phi \quad (2.59)$$

得到运动方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi = j \quad (2.60)$$

求解这个方程我们可以引入推迟 Green 函数  $D_R(x-y)$ , 代表之前时刻对当前时刻的影响, 满足

$$(\partial_x^2 + m^2)D_R(x-y) = -i\delta^4(x-y) \quad (x^0 > y^0) \quad (2.61)$$

可以得到

$$\phi(x) = \phi_0(x) + i \int d^4y D_R(x-y) j(y) \quad (2.62)$$

对于场算符的对易子我们可以改写为

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right\} \quad (2.63)$$

其中第二项是因为对于空间部分积分可以做变换  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , 从而可以得到与第一项相同的指数部分,  $p^0 = -E_{\mathbf{p}}$ . 如果选取积分围道为包含两个  $p^0 = E_{\mathbf{p}}, p^0 = -E_{\mathbf{p}}$  极点的下半平面的半圆, 在极点附近为上半平面的小圆弧, 我们可以得到

$$D_R(x-y) = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (x^0 > y^0) \quad (2.64)$$

可以验证  $D_R(x-y)$  满足推迟 Green 函数的定义.

如果对于  $x^0 < y^0$ , 我们可以选取上半平面的大半圆以及下半平面的小半圆.

如果选取不同的小圆弧, 一个在极点上方一个在极点下方, 我们可以得到 Feynman 传播子

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.65)$$

我们可以将极点推离实轴, 从而得到

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.66)$$

我们有对易关系

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y), & x^0 > y^0 \\ D(y-x), & x^0 < y^0 \end{cases} = \theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \theta(y^0 - x^0) D(y-x) \quad (2.67)$$

积分围道为, 在  $x^0 > y^0$  时选取下半平面的半圆, 在  $x^0 < y^0$  时选取上半平面的半圆. 若用编时乘积我们有

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle. \quad (2.68)$$

Feynman 传播子是与 Feynman 图相关联的, 在计算振幅时我们 Feynman 图的内线就代表着 Feynman 传播子.

# Chapter 3

## Dirac 场

### 3.1 Lie 群

我们知道场可以按照 Lorentz 变换的性质来分类, 每个场在 Lorentz 变换下都对应着 Lorentz 群的一个表示. 对于任意一个场  $\Phi(x)$ , 在 Lorentz 变换下为

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \Phi'(x) = M(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x) \quad (3.1)$$

其中  $M(\Lambda)$  为 Lorentz 群的表示矩阵.

Lorentz 群是 Lie 群的一种, 在粒子物理学中我们主要研究 Lie 群的性质, 对于任意一个 Lie 群的群元素我们总可以写成指数形式

$$U = e^{-i\theta_a T^a} \quad (3.2)$$

其中  $\theta_a$  称为群参数, 而  $T^a$  称为 Lie 群的生成元, 满足如下关系

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (3.3)$$

构成一个代数称为 Lie 代数, 其中  $f^{abc}$  为结构常数为实数. 在不同的表示下, 生成元  $T^a$  的矩阵形式不同, 但是满足相同的 Lie 代数关系, 也就是说 Lie 代数完全决定了 Lie 群在恒元附近的性质.

#### Example 3.1.1 (Lie 群的例子)

- (i)  $SO(3)$  群, 生成元为角动量算符  $J_i$ , 满足  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ .
- (ii)  $SU(2)$  群, 生成元为自旋 1/2 例子的角动量算符  $\tau_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ , 满足  $[\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijk}\tau_k$ . 与  $SO(3)$  群的生成元的对易关系一致说明  $SU(2)$  群在恒元附近与  $SO(3)$  的性质一致, 但是  $SU(2) \neq SO(3)$ , 实际上  $SU(2)$  是  $SO(3)$  群的双覆盖.

我们接下来要研究的 Dirac 场在 Lorentz 变换下对应的表示为  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ , 也就是旋量表示, 即

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x). \quad (3.4)$$

我们首先讨论 Lorentz 群的 Lie 代数, 考虑无穷小变换

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad \Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} \quad (3.5)$$

满足保度规条件  $\Lambda^T g \Lambda = g \implies \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ , 记 Lorentz 的生成元为  $J^{\mu\nu}$ , 则有

$$M(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}. \quad (3.6)$$

类比于旋转群的生成元, 也就是角动量  $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = -i(x^i \nabla_j - x^j \nabla_i)$ , 我们可以写出 Lorentz 群的生成元

$$J^{\mu\nu} = -i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu), \quad (3.7)$$

及其对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (3.8)$$

生成元的矩阵形式决定于表示, 考虑矢量场的 Lorentz 变换, 我们有

$$V^\alpha(x) \rightarrow V'^\alpha(x) = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta(\Lambda^{-1}x) = (e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}})^\alpha_\beta V^\beta(\Lambda^{-1}x). \quad (3.9)$$

对于无穷小变换, 变换矩阵为

$$\delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\alpha_\beta \quad (3.10)$$

若取

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha), \quad (3.11)$$

可以验证它确实满足 Lorentz 群生成元的对易关系.

### Example 3.1.2 (Lorentz 群的矩阵)

(i) 绕  $z$  轴的旋转,  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ , 代入可得矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

确实是旋转矩阵.

(ii)  $x$  方向的 Lorentz boost, 代入可得矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

确实是  $x$  方向的 Lorentz boost.

## 3.2 Lorentz 群的旋量表示

为了考虑旋量表示, 我们首先引入 Dirac 代数, 如果对于  $n \times n$  的矩阵  $\gamma^\mu$  满足如下条件

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_n, \quad \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (3.14)$$

我们称这些矩阵构成一个 Dirac 代数. 可以验证矩阵的最小维数为 4. 并且  $\gamma$  矩阵与时空的维数  $D$  满足如下关系

$$\dim(\gamma) = 2^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor}. \quad (3.15)$$

并且在任意维数下  $\gamma$  矩阵不是唯一的, 不同的  $\gamma$  矩阵之间可以相差一个相似变换. 比如  $\gamma^\mu$  是一组  $\gamma$  矩阵, 那么

$$\gamma^{\mu'} = U \gamma^\mu S^{-1} \quad (3.16)$$

也满足  $\gamma$  矩阵的定义.

因此对于 4 维时空有无穷多种  $\gamma$  矩阵的表示, 主要有以下三种.

### Claim 3.2.1 $\gamma$ 矩阵的表示

(i) Chiral-Weyl 表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

主要适合高速极端相对论的情形.

(ii) Dirac-Pauli 表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

主要适合低速非相对论的情形.

(iii) Majorana 表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

用来表示电中性的 Fermion.

我们采用 Chiral-Weyl 表示. 有了 Dirac 矩阵我们可以将 Dirac 方程改写为

$$i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.20)$$

如果定义

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (3.21)$$

可以验证它满足 Lorentz 代数的对易关系

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho}). \quad (3.22)$$

在 Chiral-Weyl 表示下, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Boost: } S^{0i} &= \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \\ \text{Rotation: } S^{ij} &= \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Sigma^k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

可以看出, 在 Chiral-Weyl 表示下,  $S^{\mu\nu}$  是分块对角的. 并且满足如下性质

$$(S^{ij})^\dagger = S^{ij}, \quad (S^{0i}) = -S^{0i}. \quad (3.24)$$

也就是说  $S$  不是 Hermite 的, 因此对应的表示不是么正的, 这实际上是因为 Lorentz 群的群参数的范围不是有界的, Lorentz 群不是紧致的.

实际上  $S^{\mu\nu}$  就是 Lorentz 群旋量表示的生成元

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \quad (3.25)$$

旋量表示具有一个特殊的性质也就是旋转  $2\pi$  会有一个额外的负号.

### Example 3.2.1 (旋量表示的例子)

考虑一个绕  $z$  轴的旋转  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\frac{1}{2}} &= e^{-\frac{i}{2}(\omega_{12}S^{12} + \omega_{21}S^{21})} = e^{-i\omega_{12}S_{12}} \\ &= e^{-i\theta} \exp\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^{123}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2}\sigma^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

可以看出

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(\theta + 2\pi) = -\Lambda_{\frac{1}{2}}(\theta), \quad \Lambda_{\frac{1}{2}}(\theta + 4\pi) = \Lambda_{\frac{1}{2}}(\theta). \quad (3.27)$$

我们已经知道了 Lorentz 群的旋量表示, 接下来我们来验证 Dirac 方程在 Lorentz 旋量表示下不变.

### Claim 3.2.2 Dirac 方程的解对应于 Lorentz 群的旋量表示

可以证明  $S^{\mu\nu}$  与  $\gamma^\nu$  满足如下的对易关系

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.28)$$

其中  $J^{\rho\sigma}$  是 Lorentz 群在矢量表示下的生成元矩阵. 利用

$$[A, [B, C]] = \{A, B\}C + C\{A, B\} - B\{A, C\} - \{A, C\}B \quad (3.29)$$

即可证明. 考虑无穷小变换

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

作用到  $\gamma^\mu$  上有

$$\begin{aligned} \Lambda_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} &= (1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \gamma^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] + \mathcal{O}(\omega^2) = \gamma^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})^\mu_\nu\gamma^\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= (\delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})^\mu_\nu + \mathcal{O}(\omega^2))\gamma^\nu = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})^\mu_\nu\right\}\gamma^\nu = \Lambda_\nu^\mu\gamma^\nu. \end{aligned} \quad (3.31)$$

在旋量表示下旋量场的变换为

$$\psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x). \quad (3.32)$$

则 Dirac 方程变为

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi'(x) = (i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \tilde{\partial}_\nu - m)\Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (3.33)$$

其中

$$\tilde{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x^\mu} \quad (3.34)$$

乘以  $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$ , 有

$$\begin{aligned} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} (i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \tilde{\partial}_\nu - m)\Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) &= i(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \tilde{\partial}_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= (i\Lambda_\rho^\mu \gamma^\rho (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \tilde{\partial}_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = (i\gamma^\rho \delta_\rho^\nu \tilde{\partial}_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = (i\gamma^\rho \partial_\rho - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

因此 Dirac 方程在 Lorentz 群的旋量表示下是不变的.

### 3.3 Dirac 场的 Lagrangian

为了构造场的 Lagrangian, 我们首先考虑 Lagrangian 所满足的条件, 我们要求  $\mathcal{L}(\psi)$  必须是一个实的标量, 这样才能满足 Lorentz 不变性, 也就是说我们要利用  $\psi$  构造出一个标量, 并且  $\psi$  的幂次尽可能小, 单独的  $\psi$  不是 Lorentz 标量, 因此我们最少考虑关于  $\psi$  的二次项.

首先考虑  $\psi^\dagger \psi$ , 如果把  $\psi$  看做列矢量那么  $\psi^\dagger$  就是一个行矢量,  $\psi^\dagger \psi$  似乎是一个标量, 但是由于

$$\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi' = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x), \quad \psi^\dagger \xrightarrow{\Lambda} \psi'^\dagger = \psi^\dagger (\Lambda^{-1}x) \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger, \quad (3.36)$$

可以看出  $\psi^\dagger$  按照  $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger$  变换,  $\psi^\dagger \psi$  并不是 Lorentz 不变的. 为了构造场的 Lagrangian 我们需要寻找一个  $\psi$  的某种形式使得它按照  $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$  变换, 这样就能与  $\psi$  构造出一个 Lorentz 标量. 为了找到这个构造我们考虑旋量表示生成元在 Hermite 共轭下的性质

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = \left( \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right)^\dagger = -\frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^\dagger = -\frac{i}{4} (\gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger} - \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{\nu\dagger}) = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \quad (3.37)$$

两边乘以  $\gamma^0$  有

$$\gamma^0 (S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \frac{i}{4} [\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0, \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0] = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = S^{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

由此我们考虑这样的构造

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.39)$$

在 Lorentz 变换下有

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}' \gamma^0 = \psi^\dagger \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 \quad (3.40)$$

而

$$\gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^\dagger} \gamma^0 = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \quad (3.41)$$

所以我们有

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \implies \bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi = \bar{\psi} \psi. \quad (3.42)$$

也就是说  $\bar{\psi}\psi$  是 Lorentz 不变的, 因此 Dirac 场的 Lagrangian 中包含  $\bar{\psi}\psi$ . 除此之外, 为了考虑动力学 Lagrangian 必须包含导数项. 为了包含导数项我们考虑如下 Dirac 旋量双线性型

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \Lambda_\nu^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \quad (3.43)$$

也就是说  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  在 Lorentz 变换下按矢量表示变换. 那么我们可以构造出一个 Lorentz 标量

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (3.44)$$

不过由于是全导数项积分后为零说明右边两项不是独立的, 因此我们只需要考虑其中一个即可. 我们取等式右边的第二项, Lagrangian 中的导数项为

$$\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (3.45)$$

系数  $i$  是为了方便, 我们将这一项的量纲选为与 Lagrangian 的量纲一致即,  $[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi] = [L]^{-4} = [M]^4$ , 因此  $[\psi] = [L]^{-\frac{3}{2}}$ , 因此  $\bar{\psi}\psi$  前应具有量纲为  $[L]^{-1} = [M]$  的系数我们取为  $m$ , 为了方便我们再加一个额外的负号, 因此 Dirac 场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (3.46)$$

利用 Euler-Lagrange 方程我们可以得到 Dirac 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} &\implies (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} &\implies -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

上述两个方程是等价的互为 Hermite 共轭.

### 3.4 Chirality

在 Chiral-Weyl 表示下我们有

$$\begin{aligned} \text{Boost: } S^{0i} &= \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \\ \text{Rotation: } S^{ij} &= \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

即  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  的生成元是分块对角的, 也就是说  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  表示是可约的. 从而我们可以将  $\psi$  分为两个部分  $\psi_L, \psi_R$  在 Weyl 表示下按不同的方式变换

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

称  $\psi_L, \psi_R$  为 Weyl 旋量. 在 Lorentz 变换下对应的变换形式为

$$\psi_L \xrightarrow{\Lambda} \psi'_L = (1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L, \quad \psi_R \xrightarrow{\Lambda} \psi'_R = (1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R. \quad (3.50)$$

也就是说对于旋转部分二者是一致的, 对于 Lorentz Boost 部分二者是不同的. 在 Pauli 矩阵中  $\sigma^2$  比较特殊它具有如下的性质

$$i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2\sigma^*\sigma^2 = -\sigma \quad (3.51)$$

我们可以得到  $\sigma_2\psi_L^*$  按照右手场的方式变换, 从而可以将  $\psi$  改写为

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

上述表示称为 Majorana 表示, 描述电中性的 Fermion.

在 Weyl 旋量的表示下 Dirac 方程可以写为

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \\ \implies &\begin{cases} -m\psi_L + i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R = 0 \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L - m\psi_R = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

当  $m \rightarrow 0$  时称为 Chiral limit, 有

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R &= 0 \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

上述方程称为 Weyl 方程, 在 Chiral limit 下 Dirac 方程退化为 Weyl 方程. 为了简化表达我们可以引入如下的记号

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}) \implies \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}^\mu \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

从而 Dirac 方程可以写为

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\psi) = \begin{pmatrix} -m & i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial \\ i\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (3.56)$$

Weyl 方程为

$$i\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \partial\psi_L = 0, \quad i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial\psi_R = 0. \quad (3.57)$$

## 3.5 Dirac 方程的解

### 3.5.1 Dirac 方程的平面波解

为了量子化 Dirac 方程我们需要 Dirac 方程的解, 对于 Dirac 方程我们可以验证 Dirac 方程的解也是满足 Klein-Gordon 方程的

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 &\implies (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ \implies (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi &= \left(\frac{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}{2}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi \\ &= (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (\square + m^2)\psi = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

因此我们可以取平面波解

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad \psi(x) = v(p)e^{ip \cdot x} \quad (3.59)$$

其中  $u(p)$  和  $v(p)$  是 Dirac 旋量, 分别对应正能解与负能解, 我们取  $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . 我们代入 Dirac 方程有

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)u(p)e^{-ip \cdot x} = (\gamma^\mu\partial_\mu - m)u(p)e^{-ip \cdot x} = 0 \implies (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad (3.60)$$

我们引入 Feynman slash 记号  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ , 我们有

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad (3.61)$$

对于负能解同样有

$$(\not{p} + m)v(p) = 0. \quad (3.62)$$

接下来我们首先从最简单的静止的 Dirac 粒子开始求解 Dirac 方程然后推广到一般的解.

### Example 3.5.1 (粒子静止情况下的 Dirac 方程的解)

对于静止的粒子我们有  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ , 因此我们有

$$\not{p} = p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} = m \gamma^0 \implies m(\gamma^0 - 1)u(p_0) = 0 \quad (3.63)$$

带入  $\gamma^0$  的表达式, 我们可以得到 Dirac 方程的解

$$\gamma^0 - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

其中  $\sqrt{m}$  是归一化系数,  $\xi$  是一个两分量的旋量, 有两个独立的解

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

因此我们可以用  $s = 1, 2$  来标记这两个解

$$u^s(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

### Example 3.5.2 (粒子沿着 $z$ 方向运动时的 Dirac 方程的解)

对于沿着  $z$  方向运动的粒子我们有  $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$ ,  $E^2 = m^2 + p_z^2$  因此我们有

$$(E\gamma^0 - p_z\gamma^3 - m)u(p) = 0 \implies \begin{pmatrix} -m & 0 & E - p_z & 0 \\ 0 & -m & 0 & E + p_z \\ E + p_z & 0 & -m & 0 \\ 0 & E - p_z & 0 & -m \end{pmatrix} u(p) = 0 \quad (3.67)$$

令  $a = \sqrt{E - p_z}$ ,  $b = \sqrt{E + p_z}$ ,  $ab = \sqrt{E^2 - p_z^2} = m$ , 我们有

$$\begin{pmatrix} -ab & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & b^2 \\ b^2 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & -ab \end{pmatrix} u(p) = 0 \implies u^s(p) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \xi^s \\ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \xi^s \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

我们有两个独立的解

$$u^1(p) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E+p_z} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E-p_z} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

(i) 低能极限

当  $p_z \rightarrow 0$  时我们有

$$u^1(p_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \\ \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2(p_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \\ 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

与静止情况下的解一致.

(ii) 高能极限

当  $p_z \rightarrow \infty, E \rightarrow \infty$  时我们有

$$u^1(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

从上述例子中的高能极限我们可以看出当  $p_z \rightarrow \infty$  对应的两个解一个是纯右手旋量, 一个是纯左手旋量, 并没有混合的解. 这是高能极限的一个特征. 这两个解实际上代表了粒子自旋为  $s_z = \frac{1}{2}$  和  $s_z = -\frac{1}{2}$  的两种情况, 为此我们引入螺旋度 (helicity) 的概念. 在高能极限下螺旋度与手性是一一对应的,  $\psi_R$  对应螺旋度为  $+1$ ,  $\psi_L$  对应螺旋度为  $-1$ , 但是在一般情况下, 二者并无关联.

### Claim 3.5.1 螺旋度

我们定义螺旋度为

$$h = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (3.72)$$

即自旋在动量方向上的投影, 这不是一个 Lorentz 不变量, 当我们在一个参考系中确定螺旋度后, 在另一个参考系中, 动量可能会反向, 而自旋的方向不变, 因此螺旋度反号. 但是在高能极限下, 就不存在这个问题, 因为在高能极限下粒子可以看作是类光的, 从而在所有的参考系中动量的方向都是相同的. 因此螺旋度对于高能极限下的粒子是一个 Lorentz 不变量.

对于无质量粒子, 一定是类光的, 从而  $h$  是一个 Lorentz 不变量.  $h = +1$  我们称为右旋,  $h = -1$  我们称为左旋. 更一般的对于所有的无质量粒子, 自旋只有两种取向, 这是因为无质量粒子为光速, 没有相对静止的参考系, 所有动量平行方向的分量都消失了, 只有横向极化.

**Example 3.5.3** (一般情况下 Dirac 方程的解)

考虑沿  $z$  方向运动的解

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\begin{pmatrix} E - p_z & 0 \\ 0 & E + p_z \end{pmatrix}} \xi^s \\ \sqrt{\begin{pmatrix} E + p_z & 0 \\ 0 & E - p_z \end{pmatrix}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

我们可以改写为更紧凑的形式

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

可以证明对于任意方向的动量上述解都是 Dirac 方程的解, 利用  $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = m^2$  即可证明.

对于负能解

$$\psi(x) = v(p)e^{ip \cdot x} \quad (3.75)$$

代入 Dirac 方程我们同样可以得到对应的旋量解

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

**3.5.2 Dirac 旋量的正交性和完备性****正交性**

考虑如下的旋量内积

$$\begin{aligned} u^{r\dagger}(p)u^s(p) &= \left( \xi^{r\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma}, \xi^{r\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \\ &= \xi^{r\dagger} (p \cdot \sigma + p \cdot \bar{\sigma}) \xi^s = 2E_p \xi^{r\dagger} \xi^s = 2E_p \delta^{rs} \end{aligned} \quad (3.77)$$

两个不同的旋量之间具有正交性关系, 但是这个正交关系并不是 Lorentz 不变的, 因此类比我们构造 Lagrangian 时的方法, 我们引入如下的正交性关系

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(p)u^s(p) &= u^{r\dagger}(p)\gamma^0 u^s(p) = \left( \xi^{r\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma}, \xi^{r\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \\ &= \xi^{r\dagger} \left( \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} + \sqrt{(p \cdot \bar{\sigma})(p \cdot \sigma)} \right) \xi^s = 2m\delta^{rs} \end{aligned} \quad (3.78)$$

同理我们有

$$v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E_p \delta^{rs}, \quad \bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs} \quad (3.79)$$

$$\bar{u}^r(p)v^r(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0 \quad (3.80)$$

与  $v(p)$  对应的正交关系主要来源于旋量解中的负号. 注意  $u^{r\dagger}(p)v^s(p) \neq 0$

$$\begin{aligned} u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) &= \left( \xi^{r\dagger} \sqrt{p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}, \xi^{r\dagger} \sqrt{p^0 \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}} \eta^s \\ -\sqrt{p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}} \eta^s \end{pmatrix} \\ &= \xi^{r\dagger} (m - m) \eta^s = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

## 完备性

考虑极化求和

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(s) &= \sum_{s=1,2} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} (\xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma}) \\
&= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = (\not{p} + m)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

同理我们有

$$\sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = (\not{p} - m). \tag{3.83}$$

## 3.6 Dirac 双线性量与 Chiral Symmetry

我们之前考虑过  $\bar{\psi}\psi$  与  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , 这样的 Dirac 双线性量, 在 Lorentz 变换下分别按照标量与矢量变换. 接下来我们讨论一般的 Dirac 双线性量, 研究它们在 Lorentz 变换下的性质. 首先给出结论共有 5 种 Dirac bilinear, 共 16 个独立分量, 如下表所示. 我们已经证明了前两个分别按照 Lorentz 标量与 Lorentz 矢量变

Label	Product	Under $P$	Components	Lorentz
S	$\bar{\psi}\psi$	$\rightarrow \bar{\psi}\psi$	1	scalar
V	$(\bar{\psi}\gamma^0\psi, \bar{\psi}\gamma^i\psi)$	$\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^0\psi, -\bar{\psi}\gamma^i\psi)$	4	vector
T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\rightarrow \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	tensor
A	$(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	$\rightarrow (-\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	4	pseudo-vector
P	$\bar{\psi}i\gamma_5\psi$	$\rightarrow -\bar{\psi}i\gamma_5\psi$	1	pseudoscalar

表 3.1: Lorentz Bilinear

换, 我们接下来证明后面三个 Dirac Bilinear 的性质.

**Claim 3.6.1**  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  在 Lorentz 变换下按照张量表示变换

对于包含两个  $\gamma$  矩阵的项由于反对易性, 我们总可以将其反对称化, 因此我们取

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{3.84}$$

在 Lorentz 变换下有

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \rightarrow \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi = \bar{\psi} \frac{i}{2} [\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}, \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\nu \Lambda_{\frac{1}{2}}] \psi = \Lambda_{\frac{1}{2}}^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}^\nu \bar{\psi}\sigma^{\mu'\nu'} \psi \tag{3.85}$$

可见在 Lorentz 变换下,  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  确实按照 Lorentz 张量表示变换. 共有 6 个独立分量.

为了探究 3 个  $\gamma$  矩阵下的 Dirac Bilinear 的性质, 我们需要引入  $\gamma^5$  矩阵, 它的定义如下

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \tag{3.86}$$

在 Chiral-Weyl 表示下, 我们有

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \quad (3.87)$$

并且满足如下性质

$$\begin{aligned} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^5 \Lambda_{\frac{1}{2}} &= -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \Lambda_{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_{\mu'}^\mu \gamma^{\mu'} \Lambda_{\nu'}^\nu \gamma^{\nu'} \Lambda_{\rho'}^\rho \gamma^{\rho'} \Lambda_{\sigma'}^\sigma \gamma^{\sigma'} \\ &= -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\nu'}^\nu \Lambda_{\rho'}^\rho \Lambda_{\sigma'}^\sigma \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^{\rho'} \gamma^{\sigma'} \\ &= -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^{\rho'} \gamma^{\sigma'} = \gamma^5 \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, (\gamma^5)^2 = 1, \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \implies [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \quad (3.89)$$

### Claim 3.6.2 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ 在 Lorentz 变换下按照矢量表示变换

对于任意 3 个  $\gamma$  矩阵的乘积, 利用反对称性及  $\gamma^5$  我们总可以将其写成  $\gamma^\mu \gamma^5$  的形式, 如

$$\gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^2 = i \gamma^2 \gamma^5 \quad (3.90)$$

因此我们只需考虑  $\gamma^\mu \gamma^5$  的性质. 在 Lorentz 变换下有

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rightarrow \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi = \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^5 \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi = \Lambda_{\mu'}^\mu \bar{\psi} \gamma^{\mu'} \gamma^5 \psi \quad (3.91)$$

可见  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$  在 Lorentz 变换下按照矢量表示变换. 共有 4 个独立分量.

### Claim 3.6.3 $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ 在 Lorentz 变换下按照标量表示变换

在 Lorentz 变换下有

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \rightarrow \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^5 \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi \quad (3.92)$$

可见  $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$  在 Lorentz 变换下按照标量表示变换. 共有 1 个独立分量.

## Dirac 理论的手征对称性

在 Chiral 表示下

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

作用到 Dirac spinor 上有

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

也就是说  $\psi_L$  与  $\psi_R$  是  $\gamma^5$  的本征态, 本征值分别为  $-1$  和  $1$ . 由此我们可以引入手征投影算符

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

作用到 Dirac spinor 上有

$$P_L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

作为投影算符,  $P_L$  和  $P_R$  满足如下性质

$$(i) \text{ 完备性: } P_L + P_R = 1, \quad (ii) \text{ 正交性: } P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad (iii) \text{ 幂等性: } P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R. \quad (3.97)$$

对于 Dirac 理论的 Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (3.98)$$

满足  $U(1)$  全局对称性. 在  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha}$  下, Lagrangian 密度保持不变, 对应的守恒流为

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (3.99)$$

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0 \quad (3.100)$$

考虑  $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi$  的变换,

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma^5} \quad (3.101)$$

Lagrangian 的变化为

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi}(i\cancel{\partial})\psi + m\bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma^5}\psi. \quad (3.102)$$

可以看出 Lagrangian 密度不再是不变的. 但是在手征极限下  $m \rightarrow 0$ , Lagrangian 保持不变, 对应的守恒流为

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{\mu 5} &= (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= (im\bar{\psi})\gamma^5\psi - \bar{\psi}\gamma^5(-im)\psi = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{aligned} \quad (3.104)$$

在手征极限下  $\partial_\mu j^{\mu 5} = 0$ , 同样有  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , 因此我们可以分解为两个守恒流

$$j_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad j_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu P_R\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2}\psi. \quad (3.105)$$

**Dirac Lagrangian 的手征分解**

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu(P_L + P_R)\psi - m\bar{\psi}(P_L + P_R)\psi \quad (3.106)$$

利用投影算符的性质

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu P_L P_L\psi &= \bar{\psi}P_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L \\ \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu P_R P_R\psi &= \bar{\psi}P_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = \bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R \\ \bar{\psi}P_L\psi &= \bar{\psi}_R\psi_L, \quad \bar{\psi}P_R\psi = \bar{\psi}_L\psi_R \end{aligned} \quad (3.107)$$

也就是说只有质量项的左右手部分相互耦合. 在手征极限下我们的守恒流  $j_L^\mu$  与  $j_R^\mu$  和  $j^\mu$  与  $j^{\mu 5}$  是等价的也就是说在手征极限下

$$U(1)_L \otimes U(1)_R \cong U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (3.108)$$

## 3.7 Dirac 场的量子化

为了量子化 Dirac 场我们需要 Dirac 场的 Hamiltonian, Dirac 场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.109)$$

$\psi$  对应的共轭动量密度为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0. \quad (3.110)$$

Dirac 场的 Hamiltonian 密度为

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} T^{00} = \int d^3\mathbf{x} (\pi\dot{\psi} - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3\mathbf{x} [i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger (-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m\gamma^0)\psi, \end{aligned} \quad (3.111)$$

可以看出其中包含了 Dirac 方程的 Hamiltonian

$$h_D = -i\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m\gamma^0 = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta. \quad (3.112)$$

### 3.7.1 等时对易关系量子化

我们首先尝试等时对易关系量子化, 即

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}), \pi_\beta(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\alpha\beta} \implies [\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\alpha\beta}. \quad (3.113)$$

其中  $\alpha, \beta$  为旋量指标.

同样我们可以将 Dirac 场用产生湮灭算符展开

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} [a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^s v^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} [a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^s v^s(-\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (3.114)$$

产生湮灭算符满足对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = [b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \quad (3.115)$$

其余对易子均为零. 若将产生湮灭算符的对易子代入 Dirac 场的对易子中, 应与等时对易关系一致. 代入可得

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \sum_{r,s} \{ [a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] u^r(\mathbf{p}) \bar{u}^s(\mathbf{p}) + [b_{-\mathbf{p}}^r, b_{-\mathbf{q}}^{s\dagger}] v^r(-\mathbf{p}) \bar{v}^s(-\mathbf{q}) \} \gamma^0 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sum_r [u^r(\mathbf{p}) \bar{u}^r(\mathbf{p}) + v^r(-\mathbf{p}) \bar{v}^r(-\mathbf{p})] \gamma^0 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (p_0\gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m + p_0\gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m) \gamma^0 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.116)$$

正是等时对易关系, 说明我们施加的对易关系是合理的. 然后我们计算 Dirac 场的 Hamiltonian, 可以得到

$$H = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger [-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m\gamma^0] \psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (3.117)$$

可以看出 Hamiltonian 的能量没有下界, 这是不合理的, 我们随后将再次讨论这个问题.

我们接下来看时空中的 Dirac 场, 利用产生湮灭算符和 Hamiltonian 的对易关系我们可以得到

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^s e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt} b_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = b_{\mathbf{p}}^s e^{iE_{\mathbf{p}}t}. \quad (3.118)$$

由此可以得到 Heisenberg 绘景下的 Dirac 场算符

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{iHt} \psi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^s v^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}) \\ \bar{\psi}(x) &= e^{iHt} \bar{\psi}(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (3.119)$$

考虑因果律, 我们需要计算 Heisenberg 绘景下的 Dirac 场的等时对易子, 可得

$$\begin{aligned} [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s (u_a^s(\mathbf{p}) \bar{u}_b^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_a^s(\mathbf{p}) \bar{v}_b^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-y)}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} [\phi(x), \phi(y)]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

在类空间隔  $(x-y)^2 < 0$  中,  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  那么  $[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = 0$ , 似乎满足因果律, 但是让我们更仔细的计算一下, 若  $[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = 0$ , 那么真空期望值也为零, 即

$$0 = \langle 0 | [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle \quad (3.121)$$

我们对真空的定义为  $a_{\mathbf{p}}^s | 0 \rangle = b_{\mathbf{p}}^s | 0 \rangle = 0$ , 那么可以得到上式第二项恒为零, 与类空和类时间隔无关. 这与我们在标量场中的量子化不一致, 在标量场量子化中, 我们引入了反粒子, 利用从  $y \rightarrow x$  的粒子与从  $x \rightarrow y$  的反粒子的振幅相消得到真空期望值为零, 在旋量场中也应有类似的关系.

### 3.7.2 反对易子量子化

回忆我们之前引入的 Dirac 海, 真空中被负能态的电子填满了, 也就是说不能在产生新的负能电子, 也就是说  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle = 0$ , 由此我们可以修改真空的定义为

$$a_{\mathbf{p}}^s | 0 \rangle = 0, \quad b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle = 0. \quad (3.122)$$

那么前式中的两项就变为了

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle, \quad \langle 0 | b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} | 0 \rangle \quad (3.123)$$

不再有某一项为零. 为了得到具体的值我们考虑真空的平移不变性

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{iP \cdot x} | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iP \cdot x} e^{-iP \cdot x} a_{\mathbf{p}}^r e^{iP \cdot x} e^{-iP \cdot x} a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{iP \cdot x} | 0 \rangle \\ &= e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | e^{iP \cdot x} a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.124)$$

即

$$(1 - e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}}) \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = 0 \quad (3.125)$$

也就是说若  $\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle \neq 0$  则有  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ , 因此

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle \propto \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (3.126)$$

我们取

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} A(\mathbf{p}) \quad (3.127)$$

考虑旋量场的两点关联函数

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_r u_a^r(\mathbf{p}) \bar{u}_b^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot (x-y)} A(\mathbf{p}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} A(\mathbf{p}) \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} A(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.128)$$

由于 Lorentz 不变性, 我们要求  $A(\mathbf{p}) = A(p^2) = A(m^2)$ , 即  $A$  为常数此外  $\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle$  可看作单粒子态的内积, 因此  $A$  应为正数, 即  $A > 0$ . 同理

$$\langle 0 | b_{\mathbf{p}}^r b_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} B, \quad B > 0. \quad (3.129)$$

我们有

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip \cdot (x-y)} B \quad (3.130)$$

由于上式出现了一个负号, 因此等时对易关系不再成立, 若要为零只能相加为零, 因此我们要求反对易关系才能成立, 即

$$\langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(y) \} | 0 \rangle = 0, \quad \text{if } (x-y)^2 < 0. \quad (3.131)$$

我们一般用对易关系来考虑因果律, 对于旋量场并不影响, 因为  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  并不对应可观测量, Bose 型算符对应的是可观测量, 也就是说只要  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  组成的是 Bose 型算符, 满足对易关系即可. 可以证明双线性 Dirac 场是 Bose 型算符, 满足对易关系, 即

$$[\bar{\psi}(x) \Gamma_1 \psi(x), \bar{\psi}(y) \Gamma_2 \psi(y)] = 0, \quad \text{if } (x-y)^2 < 0. \quad (3.132)$$

利用对易子等式

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= ABCD - CDAB = ABCD + ACBD - ACBD - CDAB \\ &= A\{B, C\}D - ACBD - ACDB + ACDB + CADB - CADB - CDAB \\ &= A\{B, C\}D - AC\{B, D\} + \{A, C\}DB - C\{A, D\}B \end{aligned} \quad (3.133)$$

即可证明.

因此我们可以施加等时反对易关系量子化

$$\begin{aligned} \{ \psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}) \} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab} \\ \{ a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} \} &= \{ b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger} \} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \end{aligned} \quad (3.134)$$

其余对易子均为零.

在等时反对易子下我们可以计算 Hamiltonian 为

$$H = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s) \quad (3.135)$$

能量仍然是无下界的, 仍然考虑我们之前引入的 Dirac 海,  $b_{\mathbf{p}}^s$  是湮灭一个负能电子产生一个空穴,  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  是产生一个负能电子也就是湮灭一个空穴. 而由于反对易子是对称的, 因此我们可以将  $b_{\mathbf{p}}^s$  重新定义为  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  产生一个空穴,  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  重新定义为  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^s$ , 湮灭一个空穴. 此时真空为

$$a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = \tilde{b}_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = 0 \quad (3.136)$$

我们将空穴称为电子的反粒子也就是正电子. 为了方便略去  $\tilde{\cdot}$ . 从而 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)). \end{aligned} \quad (3.137)$$

### Fermi-Dirac 统计

我们可以利用反对易关系推出 Fermi-Dirac 统计. 对于旋量场的单粒子态

$$|\mathbf{p}, s\rangle \sim a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle, \quad |\mathbf{p}, s\rangle \sim b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (3.138)$$

对于两个粒子

$$|\mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2\rangle \sim a_{\mathbf{p}_1}^{s_1\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{s_2\dagger} |0\rangle, \quad |\mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1\rangle \sim a_{\mathbf{p}_2}^{s_2\dagger} a_{\mathbf{p}_1}^{s_1\dagger} |0\rangle \quad (3.139)$$

由于反对易关系, 我们有

$$|\mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2\rangle = -|\mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1\rangle \quad (3.140)$$

由此我们有

$$(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger})^2 = 0 \quad (3.141)$$

也就是 Pauli 不相容原理, 我们可以推广到所有自旋的情况, 也就是自旋统计定理.

#### Theorem 3.7.1 自旋统计定理

**整数**自旋的物理场必须用对易关系进行量子化, 对应的粒子是 **Bosen**; **半奇数**自旋的物理场必须用反对易关系进行量子化, 对应的粒子是 **Fermion**.

综上所述我们完成了 Dirac 场的量子化, 场算符展开为

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}) \\ \bar{\psi}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Hamiltonian 为

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s) \quad (3.143)$$

动量为

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (3.144)$$

单粒子态的归一化

$$\langle \mathbf{p}, r | \mathbf{q}, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \implies |\mathbf{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle. \quad (3.145)$$

### Dirac 粒子的自旋

我们在之前量子化 Dirac 场时需要对自旋指标求和, 我们现在来看看自旋与角动量之间的关系. 考虑空间转动下场的变换

$$\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (3.146)$$

对应的变换为我们要求对应的守恒荷

$$j^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta_0 \psi \quad (3.147)$$

考虑绕  $z$  轴的变换, 对应坐标的变换为

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = (\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu) x^\nu, \quad \delta x^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu = \omega^{\mu\nu} x_\nu \quad (3.148)$$

对于绕  $z$  轴的变换

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta, \delta x^0 = \delta x^3 = 0 \quad (3.149)$$

场的变换为

$$\delta_0 \psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x) \quad (3.150)$$

Lorentz 变换的旋量表示  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  为

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = e^{-i\omega_{12} S^{12}} \simeq (1 - i\theta S^{12})(1 - i\theta \Sigma^3/2) \quad (3.151)$$

绕  $z$  轴转动时, Lorentz 矩阵为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.152)$$

对应的逆矩阵为

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

所以

$$\Lambda^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x + \theta y \\ y - \theta x \\ z \end{pmatrix} \quad (3.154)$$

因此对应的场的变换为

$$\begin{aligned} \delta_0 \psi(x) &= (1 - i\theta \Sigma^3/2) \psi(t, x + \theta y, y - \theta x, z) - \psi(t, x, y, z) \\ &= -\theta \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \Sigma^3 \right) \psi \end{aligned} \quad (3.155)$$

对应的守恒荷为  $z$  方向的角动量

$$J_z = Q = \int d^3\mathbf{x} j^0 = \int d^3\mathbf{x} \left[ -i\bar{\psi} \gamma^0 \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \Sigma^3 \right) \psi \right] \quad (3.156)$$

推广到一般的转动, 可以得到总的角动量

$$\mathbf{J} = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \left[ \mathbf{x} \times (-i\nabla) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \right] \psi \quad (3.157)$$

上式第一项为轨道角动量, 第二项为自旋角动量. 我们接下来证明 Dirac 粒子的自旋确实为  $\frac{1}{2}$ . 上式第一项在非相对论情况下代表粒子的轨道角动量, 但是在不能直接的推广到相对论的 Fermions 上, 但是对于粒子的自旋, 考虑静止粒子即可那么第一项为零. 我们考虑  $J_z$  作用到静止的单粒子态  $a_0^{s\dagger} |0\rangle$ , 即  $J_z a_0^{s\dagger} |0\rangle$  就能得到粒子的角动量, 由于  $J_z |0\rangle = 0$  因此我们只需计算  $[J_z, a_0^{s\dagger}] |0\rangle$  即可. 对于静止粒子考虑  $t = 0$  时刻的  $J_z$ , 代入场算符的展开式有

$$\begin{aligned} J_z &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad \times \sum_{r,r'} \left( a_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}') + b_{-\mathbf{p}'}^{r'} v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}') \right) \frac{\Sigma^3}{2} \left( a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(-\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (3.158)$$

首先对  $\mathbf{x}$  积分有

$$J_z = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r,r'} \left( a_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}'}^{r'} v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}) \right) \frac{\Sigma^3}{2} \left( a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(-\mathbf{p}) \right) \quad (3.159)$$

对于对易子  $[J_z, a_0^{s\dagger}]$ , 相关的项有四项

$$[a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} a_{\mathbf{p}}^r, a_0^{s\dagger}], \quad [b_{-\mathbf{p}}^{r'} a_{\mathbf{p}}^r, a_0^{s\dagger}], \quad [a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger}, a_0^{s\dagger}], \quad [b_{-\mathbf{p}}^{r'} b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger}, a_0^{s\dagger}] \quad (3.160)$$

利用对易子的性质  $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ , 可得对真空态作用不为零项为

$$[a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} a_{\mathbf{p}}^r, a_0^{s\dagger}] = a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} \{a_{\mathbf{p}}^r, a_0^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}) \delta^{rs} a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} \quad (3.161)$$

代入可得

$$\begin{aligned} J_z a_0^{s\dagger} &= [J_z, a_0^{s\dagger}] |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r,r'} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}) \frac{\Sigma^3}{2} u^r(\mathbf{p}) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}) \delta^{rs} a_{\mathbf{p}}^{r'\dagger} |0\rangle \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{r'} u^{r'\dagger}(0) \frac{\Sigma^3}{2} u^s(0) a_0^{r'\dagger} |0\rangle \\ &= \frac{1}{4m} \sum_{r'} \sqrt{m} (\xi^{r'\dagger}, \xi^{r'\dagger}) \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} a_0^{r'\dagger} |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r'} \xi^{r'\dagger} \sigma^3 \xi^s a_0^{r'\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (3.162)$$

当  $s = 1$  时我们有

$$J_z a_0^{s=1\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{r'} \xi^{r'\dagger} \sigma^3 \xi^1 a_0^{r'\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} \xi^{1\dagger} \sigma^3 \xi^1 a_0^{1\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} a_0^{1\dagger} |0\rangle \quad (3.163)$$

因此我们证明了粒子的自旋确实是  $1/2$ . 同理对于  $s = 2$  我们有

$$J_z a_0^{s=2\dagger} |0\rangle = -\frac{1}{2} a_0^{s=2\dagger} |0\rangle \quad (3.164)$$

对于反粒子我们有

$$J_z b_0^{s=1\dagger} |0\rangle = -\frac{1}{2} b_0^{s=1\dagger} |0\rangle, \quad J_z b_0^{s=2\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} b_0^{s=2\dagger} |0\rangle \quad (3.165)$$

当然还有一种可能粒子的自旋为  $\frac{3}{2}$ , 我们可以构造总自旋角动量算符  $\mathbf{J}^2$  证明其值为  $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$ , 因此电子的自旋确实是  $\frac{1}{2}$ .

初次之外我们还可以证明电子与正电子的带有相反的电荷. 我们知道  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  具有  $U(1)$  对称性, 对应的守恒流为

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (3.166)$$

守恒荷为

$$Q = \int d^3\mathbf{x}j^0 = \int d^3\mathbf{x}\bar{\psi}\gamma^0\psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^sb_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \quad (3.167)$$

上式第二项并不具有粒子数算符的形式, 无法直接说明其代表电荷, 因此利用反对易关系, 我们有

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s + (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{0})) \quad (3.168)$$

出现了无穷大项, 考虑 Dirac 海, 在真空中充满了正电子因此真空中的电荷是正无穷, 也就是说无穷大代表了真空中 Dirac 海的电荷, 我们规定真空的电荷为零, 略去无穷大. 即

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s) \quad (3.169)$$

可以看出  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  产生一个带有正电荷的粒子, 而  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  产生一个带有负电荷的粒子, 我们规定电子带负电从而给  $Q$  加一个系数  $-|e|$ , 使之与我们的规定一致.

### 3.8 Dirac 场的传播子

我们之间计算过 Dirac 场的两点关联函数

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u_a^s(\mathbf{p})\bar{u}_b^s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} = (i\cancel{\partial}_x + m)D(x-y) \end{aligned} \quad (3.170)$$

对于  $\langle 0 | \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x) | 0 \rangle$  同样有

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x) | 0 \rangle = -(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab}D(y-x) \quad (3.171)$$

我们之前定义了标量场的推迟传播子

$$D_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (3.172)$$

同理也可以定义 Dirac 场的推迟传播子

$$\begin{aligned} S_R(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab}(D(x-y) - D(y-x)) \end{aligned} \quad (3.173)$$

标量场的推迟传播子实际上就是标量场所满足的 K-G 方程的推迟 Green 函数, 那么 Dirac 场的推迟传播子也应该是 Dirac 方程的推迟 Green 函数, 首先对推迟传播子做一个变形

$$\begin{aligned} S_R(x-y) &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab}(\theta(x^0 - y^0)(D(x-y) - D(y-x))) - i\gamma_0\partial_0(\theta(x^0 - y^0))(D(x-y) - D(y-x)) \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab}D_R(x-y) - i\gamma_0\delta(x^0 - y^0)(D(x-y) - D(y-x)) \end{aligned} \quad (3.174)$$

上式第二项在  $x^0 = y^0$  时为零, 因此

$$S_R(x-y) = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} D_R(x-y) \quad (3.175)$$

那么我们有

$$(i\cancel{\partial}_x - m)S_R(x-y) = (i\cancel{\partial}_x - m)(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} = -(\partial^2 + m^2)_{ab} D_R(x-y) = i\delta^4(x-y)\mathbf{I} \quad (3.176)$$

其中  $\mathbf{I}$  为  $4 \times 4$  的恒等矩阵. 上式说明了 Dirac 场的推迟传播子确实是 Dirac 方程的推迟 Green 函数.

对上式做一个 Fourier 变换我们有

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\cancel{p} - m) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{S}_R(p) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \mathbf{I} \quad (3.177)$$

因此我们有

$$\tilde{S}_R(p) = \frac{i}{\cancel{p} - m} = \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2} \quad (3.178)$$

同样我们可以定义 Feynman 传播子,

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.179)$$

选取恰当的积分围道, 我们有

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T[\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle, & x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle, & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (3.180)$$

Feynman 传播子对应于 Feynman 图的内线. 我们在讨论相互作用场论时会看到 Feynman 传播子的重要性.



# Chapter 4

## 时空对称性与 $CPT$ 定理

### 4.1 Lorentz 变换

时空对称性包含 Lorentz 对称性与时空分立对称性如空间反射、时间反演。  
Lorentz 变换为

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4.1)$$

保证内积  $x^2 = x^\mu x_\mu$  不变, 满足保度规条件

$$\Lambda g \Lambda^T = g = \Lambda^T g \Lambda \quad (4.2)$$

也就是保证

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3)$$

不变. 我们可以对保度规条件取行列式有

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \implies \det \Lambda = \pm 1 \quad (4.4)$$

我们所熟知的 Lorentz 变换矩阵为 (沿着  $x$  轴方向的 boost)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

显然行列式为 1. 我们可以将保度规条件写为

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \implies (\Lambda_0^0)^2 = 1 + (\Lambda_0^i)(\Lambda_0^i) \implies \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ or } \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (4.6)$$

我们所熟知的 Lorentz 变换实际上满足

$$\det \Lambda = 1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1 \quad (4.7)$$

我们可以引入两个特殊的时空变换

$$P_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

也就是空间反演与时间反演, 满足上述条件, 因此也属于广义的 Lorentz 变换. 并且

$$\det P = -1, \quad P_0^0 \geq 1, \quad \det T = -1, \quad T_0^0 \leq -1 \quad (4.9)$$

由此我们可以对 Lorentz 变换进行分类, 可以将其写在如图所示的四个象限中, 其中  $\uparrow$  代表  $\Lambda_0^0 \geq 1$ ,  $\downarrow$  代表  $\Lambda_0^0 \leq -1$ ,  $+$  代表空间部分保持不变,  $-$  代表空间部分反转.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\mathbf{L}_+^\uparrow \\ T \updownarrow & & \updownarrow T \\ \mathbf{L}_+^\downarrow = T\mathbf{L}_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & \mathbf{L}_-^\downarrow = PT\mathbf{L}_+^\uparrow \end{array}$$

图 4.1: 广义 Lorentz 变换的分类

这四个部分代表 Lorentz 群的四个不连通的分支, 分别称为固有保时向, 非固有保时向, 固有反时向与非固有反时向, 通过  $P, T$  变换相联系. 我们将固有保时向 Lorentz 变换  $\mathbf{L}_+^\uparrow$  与时空平移变换, 称为 Poincaré 群. Poincaré 对称性是 QFT 的严格对称性.

我们过去认为物理在这四个变换下都是保持不变的, 但是实际上自然界中存在着宇称破坏也就是时空反演对称性的破坏. 我们正常经历的时间是热力学时间, 和时间反演并不矛盾.

## 4.2 经典场论中的 $P$ 和 $T$ 对称性

经典场论中的  $P$  和  $T$  对称性主要通过两种方式体现, 其一是 Lagrangian 在变换下保持不变, 其二是运动方程在变换下保持不变.

### 4.2.1 空间反演

类比于场的 Lorentz 变换, 在空间反演变换下

$$\phi(x) \xrightarrow{P} \phi'(x) = P\phi(P^{-1}x) \quad (4.10)$$

考虑 K-G 方程

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0 \quad (4.11)$$

此时  $\phi'(x)$  满足

$$\phi'(x) = \pm \phi(P^{-1}x) \quad (4.12)$$

这里  $\pm$  的原因是因为空间反演作用两次要回到原来的场, 但是这实际上不影响下面对运动方程的推导.

代入 KG 方程可得

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi'(x) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + m^2 \right) \phi(t, -\mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial(-x^i)} \frac{\partial}{\partial(-x^i)} + m^2 \right) \phi(t, -\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

对于 Dirac 理论

$$(\not{p} - m)\psi(x) = 0 \quad (4.14)$$

场的变换为

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x) = P_{4 \times 4} \psi(P^{-1}x) \quad (4.15)$$

对应场方程为

$$\begin{aligned} \left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi'(x) &= \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) P\psi(t, -\mathbf{x}) \\ &= \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \frac{\partial}{\partial(-x^i)} - m \right) P\psi(t, -\mathbf{x}) \\ &= P \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial(-x^i)} - m \right) \psi(t, -\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

我们要求 Dirac 方程满足空间反演对称性也就是上述等式成立只需

$$[\gamma^0, P] = 0, \{\gamma^i, P\} = 0 \rightarrow P = \gamma^0 \quad (4.17)$$

这里由于 Dirac 场是个四分量场, 相应的空间反演也是一个矩阵, 且满足  $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$

### 4.2.2 时间反演

在时间反演变换下, 如果定义

$$\psi'(t, \mathbf{x}) = \psi(-t, \mathbf{x}) \quad (4.18)$$

这样定义无法满足 Schrödinger 方程, 可以令  $\psi'(t, \mathbf{x}) = \psi^*(-t, \mathbf{x})$ , 将 Schrödinger 方程作复共轭可得到

$$i \frac{\partial}{\partial(-t)} \psi^* = H^* \psi^* \quad (4.19)$$

对于 KG 方程则可以直接令  $t \rightarrow -t$  因为 KG 方程是关于时间的导数是二阶的.

对于 Dirac 方程同样具有时间的一阶导数因此我们可以假定

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x) = T_{4 \times 4} \psi^*(T^{-1}x) \quad (4.20)$$

我们要求  $T$  满足

$$T^{-1} \gamma^\mu T = (\gamma_\mu)^* \rightarrow T = i\gamma^1 \gamma^3, \quad T = T^\dagger = T^{-1} \quad (4.21)$$

我们可以验证 Dirac 方程满足时间反演对称性

$$\begin{aligned} T^{-1} \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) T\psi^*(-t, \mathbf{x}) &= T^{-1} \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) T\psi^*(-t, \mathbf{x}) \\ &= \left( i(\gamma_0)^* \frac{\partial}{\partial t} + i(\gamma_i)^* \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \psi^*(-t, \mathbf{x}) = \left( -i(\gamma_0)^* \frac{\partial}{\partial(-t)} - i(\gamma^i)^* \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \psi^*(-t, \mathbf{x}) \\ &= \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial(-t)} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^* \psi^*(-t, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

## 4.3 量子 Poincaré 群及其李代数

经典的 Poincaré 变换为 ( $a^\mu$  为时空平移)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (4.23)$$

可以作用两次验证这个变换构成一个群

$$x'^{\mu} \rightarrow x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} x'^{\rho} + \bar{a}^{\mu} = (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu}) x^{\nu} + (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}) \quad (4.24)$$

可以看出作用两次之后依旧是 Poincaré 变换, 体现出 Poincaré 的群性质.

有了经典的 Poincaré 变换我们可以定义量子 Poincaré 群. 量子 Poincare 算符为

$$U(\Lambda, a) \quad (4.25)$$

首先考虑时空平移作用于单粒子态上有

$$U(0, a)|\mathbf{p}\rangle = e^{iP^{\mu}a_{\mu}}|\mathbf{p}\rangle = e^{iP \cdot a}|\mathbf{p}\rangle \quad (4.26)$$

其中  $P^{\mu} = (H, \mathbf{p})$ , 作用在单粒子态上就得到动量. 对于纯 Lorentz 变换有

$$U(\Lambda, 0)|\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle \quad (4.27)$$

$U$  满足群的乘法公式

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \quad (4.28)$$

由此  $U$  填充了 Poincare 群的无穷维表示, 因为是作用在 Hilbert 无穷维空间上. 还可以得到

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \quad (4.29)$$

对  $U(\Lambda, a)$  单位圆附近展开有

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, a^{\mu} = \epsilon^{\mu} \quad (4.30)$$

则有

$$U(\Lambda, a) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \quad (4.31)$$

利用群的乘法公式得到

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda(1 + \omega), \Lambda\epsilon + a)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \end{aligned} \quad (4.32)$$

取  $\omega, \epsilon$  的第一阶则有

$$U(\Lambda, a) \left[ \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_{\rho}P^{\rho} \right] U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu} \quad (4.33)$$

方程两边的  $\omega_{\rho\sigma}$  系数相同就可以得到

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\rho}_{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\nu}(J^{\mu\nu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}) \\ U(\Lambda, a)P^{\rho}U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\rho}_{\mu}P^{\mu} \end{aligned} \quad (4.34)$$

再取  $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$ , 代入上式并只取一阶项. 可得

$$\begin{aligned} i \left[ \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] &= \omega^{\rho}_{\mu}J^{\mu\sigma} + \omega^{\sigma}_{\nu}J^{\rho\nu} - \epsilon^{\rho}P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma}P^{\rho} \\ i \left[ \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, P^{\rho} \right] &= \omega^{\rho}_{\mu}P^{\mu} \end{aligned} \quad (4.35)$$

这里取的无穷小变量和前面的  $\omega, \epsilon$  无关根据  $\omega_{\mu\nu}, \epsilon_\mu$  的系数必须相同, 我们可以得到相应的 Lie 代数

$$\begin{aligned}
\left[ i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma} \right] &= \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu^\sigma J^{\rho\nu} \\
i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu^\sigma J^{\rho\nu} \\
i\omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= 2g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} + 2g^{\mu\sigma}\omega_{\nu\mu}J^{\rho\nu} \\
i\omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} + g^{\rho\mu}\omega_{\nu\mu}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\omega_{\nu\mu}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\mu} \\
i\omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}\omega_{\mu\nu}J^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\mu} \\
i [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= g^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}J^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} \\
\Rightarrow [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma})
\end{aligned} \tag{4.36}$$

以及

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}p^\sigma - g^{\mu\sigma}p^\rho) \tag{4.37}$$

令

$$p^0 = H, \mathbf{p} = \{p^1, p^2, p^3\} \tag{4.38}$$

也就是能量和动量算符.

$$\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \tag{4.39}$$

为角动量算符

$$\mathbf{K} = J^{01}, J^{02}, J^{03} \tag{4.40}$$

为 Boost 算符, 一共十个生成元. 可以将对易关系改写为

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k \\
[K_i, P_j] &= -iH\delta_{ij}, \quad [K_i, H] = iP_i, \quad [J_i, H] = [P_i, H] = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

以上便是 Poincaré 群的 Lie 代数. 并且这里的在有限维表示中 Lorentz 群的表示矩阵是非么正的, 但是此处是无限维的 Hilbert 空间, Lorentz 群的表示是么正的.

### 4.3.1 广义的 Poincaré 变换

如果一个量子理论是  $P, T$  不变的, 对应的精确含义为

$$\begin{aligned}
U(P, 0)U(\Lambda, a)U^{-1}(P, 0) &= U(P\Lambda P^{-1}, Pa) \\
U(T, 0)U(\Lambda, a)U^{-1}(T, 0) &= U(T\Lambda T^{-1}, Ta)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

即第一三四象限也满足群的乘法, 构成了 Poincaré 群的一部分. 同样取

$$\lambda = 1 + \omega, a = \epsilon, \omega^{\mu\nu}, \epsilon^\mu \tag{4.43}$$

是无穷小量

$U(T, 0), U(P, 0)$  分别是时间反演算符和空间反演算符. 引入简写符号  $P, T$  代指反演算符. 利用前面的公式

$$U(P, 0)U(\Lambda, a)U^{-1}(P, 0) = U(P\Lambda P^{-1}, Pa) \tag{4.44}$$

可得到

$$PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} = iP_\mu^\rho P_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \quad PiP^\mu P^{-1} = iP_\nu^\mu P^\nu \tag{4.45}$$

类似的有

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = iT_{\mu}^{\rho}T_{\nu}^{\sigma}J^{\mu\nu}, \quad TiP^{\mu}T^{-1} = iT_{\nu}^{\mu}P^{\nu} \quad (4.46)$$

为了确定  $T, P$  的性质, 引入 Wigner Symmetry 定理.

### Theorem 4.3.1

任何一个对称性对应的量子算符 (包括分立的), 只能属于两种类型, 第一类线性并且么正, 第二类反线性且反么正.

我们以两个态的内积为例, 来对这个定理做一个说明

(i) 么正性

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \hat{U}\psi_1 | \hat{U}\psi_2 \rangle \quad (4.47)$$

(ii) 线性

$$\hat{U}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\hat{U}|\psi_1\rangle + b\hat{U}|\psi_2\rangle \quad (4.48)$$

(iii) 反么正

$$\langle \hat{U}\psi_1 | \hat{U}\psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \quad (4.49)$$

(iv) 反线性

$$\hat{U}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a^*\hat{U}|\psi_1\rangle + b^*\hat{U}|\psi_2\rangle \quad (4.50)$$

连续变换对应么正线性算符, 对应反么正反线性算符只能对应离散变换.

我们考虑  $P$  则有

$$Pi\hat{P}^{\mu}P^{-1} = iP_{\nu}^{\mu}\hat{P}^{\nu} \quad (4.51)$$

取  $\mu = 0$ , 则有  $PiHP = iH$ , 我们假设  $P$  是反线性反么正算符, 则

$$PHP^{-1} = -H \quad (4.52)$$

假设存在一个定态

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (4.53)$$

考察  $P^{-1}|\psi\rangle$ , 则

$$H(P^{-1}|\psi\rangle) = -PE|\psi\rangle \quad (4.54)$$

说明空间反演后状态仍然是 Hamiltonian 的本征态, 但空间反演之后能量为负, 比真空能量还低, 是不可接受的, 说明  $P$  只能是线性么正算符. 更一般的我们有

$$PJP^{-1} = \mathbf{J} \quad P\mathbf{p}P^{-1} = -\mathbf{p} \quad PKP^{-1} = -\mathbf{K} \quad (4.55)$$

这个结果很自然, 因为空间反演下速度方向相反, boost 方向也相反, 但角动量中的位矢和动量的负号抵消, 所以不变 (也称角动量为轴矢量).

对于  $T$ , 取  $\mu = 0$ , 则

$$TiHT = -iH \quad (4.56)$$

同样用反证法可以得到  $T$  是反线性反么正的.

$$TJT^{-1} = -\mathbf{J} \quad T\mathbf{p}T^{-1} = -\mathbf{p} \quad TKT^{-1} = \mathbf{K} \quad (4.57)$$

在时间反演下, 动量变号, 位矢不变, 则角动量也变号.

### 4.3.2 单粒子态在 $P$ 和 $T$ 作用下的性质

考虑一个静止有自旋的粒子,  $|k, \sigma\rangle$  则  $P|k, \sigma\rangle = \eta_\sigma |k, \sigma\rangle$ , 因为粒子静止, 空间反演无法改变其动量  $k$  和自旋  $\sigma$ , 可以利用  $PJP^{-1} = J$  则有

$$\begin{aligned} PJ_\pm |k, \sigma\rangle &= P\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} |k, \sigma_{\pm 1}\rangle \\ &= J_\pm P |k, \sigma\rangle = \eta_\sigma J_\pm |k, \sigma\rangle = \eta_{\sigma_{\pm 1}} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} |k, \sigma_{\pm 1}\rangle \end{aligned} \quad (4.58)$$

即  $\eta_\sigma = \eta_{\sigma_{\pm 1}}$ , 说明  $\eta$  是一个内禀宇称, 一般选取  $\pm 1$ , 和  $\sigma$  无关. 对于有动量的粒子

$$P|\mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta |-\mathbf{p}, \sigma\rangle \quad (4.59)$$

则不是空间反演算符的本征态.

对单粒子态的时间反演变换

$$T\mathbf{p}T^{-1} = -\mathbf{p} \quad THT^{-1} = H \quad TJT = -J \quad (4.60)$$

考虑静止粒子  $k^\mu = (m, 0)$

$$HT|k, \sigma\rangle = mT|k, \sigma\rangle \quad PT|k, \sigma\rangle = 0 \quad JT|k, \sigma\rangle = -\sigma T|k, \sigma\rangle \quad (4.61)$$

因此

$$T|k, \sigma\rangle = \xi_\sigma |k, -\sigma\rangle, |\xi_\sigma| = 1 \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} TJ_\pm |k, \sigma\rangle &= T(J_1 \pm iJ_2)|k, \sigma\rangle = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} T|k, \sigma_{\pm 1}\rangle \\ &= \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \xi_{\sigma_{\pm 1}} |k, -(\sigma \pm 1)\rangle \\ &= -J_\mp T|k, \sigma\rangle = -\xi_\sigma J_\mp |k, -\sigma\rangle = -\xi_\sigma \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} |k, -(\sigma \pm 1)\rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

即

$$\xi_{\sigma_{\pm 1}} = -\xi_\sigma \quad (4.64)$$

则

$$T|k, \sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma} |k, -\sigma\rangle \quad (4.65)$$

$\xi$  无重要的物理意义, 可以设定  $|k, \sigma'\rangle = \sqrt{\xi} |k, \sigma\rangle$

接下来讨论运动粒子

$$T|\mathbf{p}, \sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma} |-\mathbf{p}, -\sigma\rangle \quad Ta_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}T^{-1} = \xi(-1)^{j-\sigma} a_{-\mathbf{p}}^{-\sigma\dagger} \quad T^2|\mathbf{p}, \sigma\rangle = (-1)^{2j} |\mathbf{p}, \sigma\rangle \quad (4.66)$$

注意  $T$  在和  $\xi$  交换时根据反线性算符的性质  $\xi \rightarrow \xi^*$

对于零质量粒子

$$T^2|\mathbf{p}, \lambda\rangle = (-1)^{2\lambda} |\mathbf{p}, \lambda\rangle \quad (4.67)$$

其中  $\lambda$  为螺旋度. 如果态是由奇数个 Fermion 组成,  $2j$  为奇数,  $T^2 = -1$ . 设  $|\psi\rangle$  为能量本征态, 此时  $T|\psi\rangle, |\psi\rangle$  还是一个态吗?

用反证法

$$T|\psi\rangle = c|\psi\rangle, T^2|\psi\rangle = c^*T|\psi\rangle = |c|^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (4.68)$$

和  $T^2 = -1$  矛盾. 因此对 Fermion 来说,  $|\psi\rangle, T|\psi\rangle$  一定是简并的, 也称为 Kramers 简并.

自由 Fermion 自然有上下自旋两种态的简并, 可以外加上一个静电场, 使原来简并的上下自旋态分离, 但这违背了 Kramers 简并, 这意味着时间反演不变禁戒了 Fermion 有非 0 的电偶极矩. 对于磁偶极矩因为磁相互作用不是时间反演不变的, 因此磁偶极矩不会被禁戒.

## 4.4 单粒子态和场算符的 Lorentz 变换

先考虑静止粒子  $k^\mu = (m, 0)$ , 考虑  $W_\nu^\mu k^\nu = k^\mu$  即不改变静止粒子的 4 矢量,  $W$  就是转动, 构成 Lorentz 群的子群也就是

$$SO(3) \subset SO(1, 3) \quad (4.69)$$

对应的算符作用到静止的单粒子态上有

$$U(W) |\theta, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W) |\theta, \sigma'\rangle \quad (4.70)$$

其中  $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W)$  以静止的单粒子态为表示空间的转动群的不可约表示, 也叫 Wigner 矩阵, 其中  $\sigma, \sigma' = -j, -j+1, \dots, j$ .

对于非静止的粒子

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W[\lambda, p]) |\Lambda p, \sigma'\rangle \quad (4.71)$$

表示矩阵依旧是原来转动群的不可约表示矩阵, 但是依赖于 little group  $W$ , 这种方法也叫 Wigner 小群诱导表示.

对于无质量粒子

$$U(\Lambda) |p, \lambda\rangle = e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} |\Lambda p, \lambda\rangle \quad (4.72)$$

其中  $\lambda$  是螺旋度, 是 Lorentz 不变量.

而

$$|p, \sigma\rangle = \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} |0\rangle \quad (4.73)$$

因此对于产生算符

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W[\lambda, p]) a_{\Lambda\mathbf{p}}^{\sigma'\dagger} \quad (4.74)$$

接下来我们考虑场算符的变换, 在经典场论中

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \Phi'(x') = M(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.75)$$

其中  $M$  为矩阵, 对应不同的场,  $M$  有不同的形式.

在量子场论中

$$U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda) = M^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda x) \quad (4.76)$$

表示矩阵互为逆. 我们接下来来证明这一点, 类比非相对论量子力学,

$$\langle y | \hat{x} | y \rangle = y \quad (4.77)$$

定义

$$\langle \phi | \hat{\Phi}(x) | \phi \rangle \quad (4.78)$$

我们希望得到  $\phi(x)$ , 则可以插入  $U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)$ , 利用  $U^{-1}(\Lambda) = U^\dagger(\Lambda)$ , 得到

$$\begin{aligned} \langle \phi | U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda) | \phi \rangle &= \langle U(\Lambda)\phi | U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda) | U(\Lambda)\phi \rangle \\ &= \langle U(\Lambda)\phi | M^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda x) | U(\Lambda)\phi \rangle = M^{-1}(\Lambda) \langle \phi' | \hat{\Phi}(\Lambda x) | \phi' \rangle \\ &= M^{-1}(\Lambda)\phi'(\Lambda x) \end{aligned} \quad (4.79)$$

又  $\phi'(x) = M(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x)$ , 则  $\phi'(\Lambda x) = M(\Lambda)\phi(x)$ , 利用经典场的变换代入之后就得到  $\phi(x)$ . 因此我们之前定义的场算符的变换形式是自洽的.

#### 4.4.1 Dirac 场的 Lorentz 变换

经典 Dirac 场的变换形式为

$$\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.80)$$

量子 Dirac 场算符的变换形式为

$$U(\Lambda)\hat{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\hat{\psi}(\Lambda x) \quad (4.81)$$

如果带入  $\hat{\psi}(x)$  的平面波展开形式, 则可以得到旋量  $u, v$  在 Lorentz 变换下的变换行为.

### 4.5 场算符在空间反演下的行为

#### 4.5.1 Klein-Gordon 场在空间反演下的行为

$$P\hat{\Phi}(x)P^{-1} = \pm\hat{\Phi}(P_{\nu}^{\mu}x^{\nu}), P_{\nu}^{\mu}x^{\nu} = x_{\nu}^{\mu} = (t, -\mathbf{x}) \quad (4.82)$$

正负号取决于具体的模型.

#### 4.5.2 Dirac 场在空间反演下的行为

利用

$$P|\mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta_{\sigma} |-\mathbf{p}, \sigma\rangle \implies P\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\sigma}P^{-1} = \eta_{\sigma}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\sigma} \quad (4.83)$$

其中  $|\eta_{\sigma}| = 1$ , 因为作用两次之后回到原来的态. 则有

$$P\psi(x)P^{-1} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} (u^{\sigma}(p)Pa_{\mathbf{p}}^{\sigma}P^{-1}e^{-ip\cdot x} + v^{\sigma}(p)Pb_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}P^{-1}e^{+ip\cdot x}) \quad (4.84)$$

其中

$$Pa_{\mathbf{p}}^{\sigma}P^{-1} = \eta_{\sigma}a_{-\mathbf{p}}^{\sigma}, Pb_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}P^{-1} = \eta_{\sigma}^*b_{-\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} \quad (4.85)$$

这里的 \* 号只是为了方便计算模方, 实际上不带 \* 号也可以计算. 定义  $\tilde{p}^{\mu} = (E_p, -\mathbf{p}), x_p^{\mu} = (t, -\mathbf{x})$ , 则  $p \cdot x = \tilde{p} \cdot x_p$ , 做代换  $p \rightarrow \tilde{p}$ , 得到

$$P\psi(x)P^{-1} = \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} (u^{\sigma}(p)\eta_{\sigma}a_{\tilde{\mathbf{p}}}^{\sigma}e^{-i\tilde{p}\cdot x_p} + v^{\sigma}(p)\eta_{\sigma}^*b_{\tilde{\mathbf{p}}}^{\sigma\dagger}e^{+i\tilde{p}\cdot x_p}) \quad (4.86)$$

然后将  $u(p)$  也表示成  $\tilde{p}$  相关的形式

$$u(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma\xi} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}\xi} \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma\xi} \end{bmatrix} = \gamma^0 \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma\xi} \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}\xi} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

则  $u(p) = \gamma^0 u(\tilde{p}), v(p) = -\gamma^0 v(\tilde{p})$  代入得到

$$P\psi(x)P^{-1} = \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \sum_{\sigma} (\gamma^0 u^{\sigma}(\tilde{p})\eta_{\sigma}a_{\tilde{\mathbf{p}}}^{\sigma}e^{-i\tilde{p}\cdot x_p} - \gamma^0 v^{\sigma}(\tilde{p})\eta_{\sigma}^*b_{\tilde{\mathbf{p}}}^{\sigma\dagger}e^{+i\tilde{p}\cdot x_p}) \quad (4.88)$$

我们希望得到  $\psi(x_b)$  的形式, 因此必须满足  $\eta_a = -\eta_b^*$ , 从而有

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta_a \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \sum_{\sigma} (\gamma^0 u^{\sigma}(\tilde{p})a_{-\mathbf{p}}^{\sigma}e^{-i\tilde{p}\cdot x_p} + \gamma^0 v^{\sigma}(\tilde{p})b_{-\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}e^{+i\tilde{p}\cdot x_p}) = \eta_a \gamma^0 \hat{\psi}(x_p) \quad (4.89)$$

$$\eta_a \eta_b = -|\eta_a|^2 = -1$$

条件的物理意义为 Fermion 和 Anti fermion 必须具有相反的内禀宇称.

**Example 4.5.1** (正反电子束缚态的内禀宇称)

考虑束缚态,  $|e^-e^+\rangle$  即正负电子偶素, 以及强子  $|q, \bar{q}\rangle$  夸克和反夸克组成的束缚态. 束缚态基态的正负电子偶素和介子的内禀宇称必须是  $-1$ . 正负电子偶素的波函数可以写作

$$|e^+e^-\rangle \propto \int d^3\mathbf{p} \phi(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\sigma_1 \dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\sigma_2 \dagger} |0\rangle \quad (4.90)$$

$$P a_{\mathbf{p}}^{\sigma_1 \dagger} P P^{-1} b_{-\mathbf{p}}^{\sigma_2 \dagger} P^{-1} |0\rangle \quad (4.91)$$

这个式子来自于空间反演算符作用于某个质心系中的波函数 (所以  $ab$  的动量相反), 前面还有一串因子 (类似于氢原子的解), 空间反演算符可以直接作用到产生湮灭算符上, 且空间反演算符作用在真空态上不改变, 然后前面的系数部分作变量替换  $p \rightarrow -p$  下不改变. 得到  $\eta_a^* \eta_b^* a_{-\mathbf{p}}^{\sigma_1 \dagger} b_{\mathbf{p}}^{\sigma_2 \dagger} = -a_{-\mathbf{p}}^{\sigma_1 \dagger} b_{\mathbf{p}}^{\sigma_2 \dagger}$ , 因此我们有

$$P |e^+e^-\rangle \propto - \int d^3\mathbf{p} \phi(\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}}^{\sigma_1 \dagger} b_{\mathbf{p}}^{\sigma_2 \dagger} |0\rangle = - |e^+e^-\rangle \quad (4.92)$$

说明基态的内禀宇称为  $-1$ .

**4.5.3 Dirac 场的双线性型在空间反演变换下的变换**

首先考虑  $\bar{\psi}$  的变化则有

$$\begin{aligned} P \bar{\psi} P^{-1} &= (P^\dagger)^\dagger \psi^\dagger(x) P^\dagger \gamma^0 = (P \psi(x) P^\dagger)^\dagger \gamma^0 \\ &= (\eta_a \gamma^0 \psi(x_p))^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \psi^\dagger(x_p) (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \bar{\psi}(x_p) \gamma^0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} P \bar{\psi} \psi P^{-1} &= P \bar{\psi} P^{-1} P \psi P^{-1} = |\eta_a|^2 \bar{\psi}(x_p) \gamma^0 \gamma^0 \psi(x_p) = \bar{\psi}(x_p) \psi(x_p) \\ P \bar{\psi} i \gamma^5 \psi P^{-1} &= |\eta_a|^2 \bar{\psi} \gamma^0 i \gamma^5 \gamma^0 \psi(x_p) = -|\eta_a|^2 \bar{\psi} i \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 \psi(x_p) = -\bar{\psi} i \gamma^5 \psi(x_p) \end{aligned} \quad (4.94)$$

正是因为这个负号,  $\bar{\psi} i \gamma^5 \psi$  称为赝标量 (空间反演下改变符号). 对于矢量双线性型, 我们有

$$\begin{aligned} P \bar{\psi} i \gamma^\mu \psi P^{-1} &= \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi(x_p) = \bar{\psi} (\gamma^\mu)^\dagger \psi(x_p) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x_p) \\ \mu = 0, \quad \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x_p) &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi(x_p), \mu = 1, 2, 3, \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x_p) = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi(x_p) \end{aligned} \quad (4.95)$$

而对于赝矢流

$$\begin{aligned} P \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi P^{-1} &= -\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \\ \mu = 0, \quad -\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x_p) &= -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x_p) \\ \mu = 1, 2, 3, \quad -\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x_p) &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x_p) \end{aligned} \quad (4.96)$$

正好和前面的矢量在宇称变换下的结果相反.

**Example 4.5.2** (Yukawa 理论的宇称)

考虑 Yukawa 理论的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = g \bar{\psi} \psi \phi + \tilde{g} \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \tilde{\phi} \quad (4.97)$$

其中  $\phi$  是一个标量场. 现在考察  $\phi, \tilde{\phi}$  在空间反演下的变化. 整个场在空间反演应该是不变的, 描述的是强相互作用, 第一项  $\bar{\psi} \psi$  空间反演不变, 即  $\phi$  在空间反演下不变, 而第二项是赝标流, 在空间反演下

有一个负号,  $\tilde{\phi}$  在空间反演下也应有一个负号. 即  $\phi$  内禀宇称为 +,  $\tilde{\phi}$  内禀宇称为 -

#### Example 4.5.3 (左手与右手 Weyl 场在空间反演下的变化)

左右 Weyl 场在空间反演下的变化:

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi, \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (4.98)$$

则

$$P\psi_L(x)P^{-1} = \frac{1 - \gamma^5}{2} \eta_a \gamma^0 \psi(x_p) = \eta_a \gamma^0 P_R \psi = \eta_a \gamma^0 \psi_R \quad (4.99)$$

也就是说在空间反演下左手场变成右手场, 右手场变成左手场.

而对于零质量的粒子, 螺旋度是个好量子数, 在空间反演下, 旋量的手征性改变, 螺旋度反号 (动量方向改变, 角动量不变).

我们可以对 Dirac 理论做手征分解, 得到 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (4.100)$$

上面的 Lagrangian 在手征变换下不改变, 即左手场变成右手场, 右手场变成左手场, 称为非手征理论.

#### Example 4.5.4 (弱相互作用的宇称破坏)

弱作用最大程度地破坏了空间反演对称性, 例如下面的弱作用 Lagrangian.

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = \frac{-4G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma_\mu P_L \mu] [\bar{e} \gamma^\mu P_L \nu_e] = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \quad (4.101)$$

只包含的左手部分, 在宇称变换下完全不守恒.  $\mu$  比  $e^-$  重两百多倍, 其他性质和  $e^-$  都一样.

$$\mu \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e \quad (4.102)$$

这个过程的 Lagrangian 全是左手 Weyl 场, 称为手征 Weyl 理论.

## 4.6 场算符的时间反演变换

考虑 Dirac 场的时间反演变换

$$T\psi(x)T^{-1} = T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_p}} \sum_\sigma (a_{\mathbf{p}}^\sigma u^\sigma(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} v^\sigma(p) e^{+ip \cdot x}) T^{-1} \quad (4.103)$$

利用单粒子态的时间反演变换

$$T a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} T^{-1} = \xi_a (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} a_{-\mathbf{p}}^{-\sigma\dagger} \quad T b_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} T^{-1} = \xi_b (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} b_{-\mathbf{p}}^{-\sigma\dagger} \quad (4.104)$$

代入得到

$$T\psi(x)T^{-1} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\sigma \left( \xi_a^* (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} a_{-\mathbf{p}}^{-\sigma} [u^\sigma(p)]^* e^{ip \cdot x} + \xi_b (-1)^{\frac{1}{2} - \sigma} b_{-\mathbf{p}}^{-\sigma\dagger} [v^\sigma(p)]^* e^{-ip \cdot x} \right) \quad (4.105)$$

令

$$x_T^\mu = (-t, \mathbf{x}), \quad \tilde{p}^\mu = (E, -\mathbf{p}), \quad p \cdot x = -\tilde{p} \cdot x_T \quad (4.106)$$

代入得到

$$T\psi(x)T^{-1} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} \left( \xi_a^* (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a_{-\mathbf{p}}^{-\sigma} [u^\sigma(p)]^* e^{-i\tilde{p} \cdot x_T} + \xi_b (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} b_{-\mathbf{p}}^{-\sigma\dagger} [v^\sigma(p)]^* e^{i\tilde{p} \cdot x_T} \right) \quad (4.107)$$

为了求出  $[u^\sigma(p)]^*, [v^\sigma(p)]^*$ , 我们有平面波解

$$u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

其中

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

我们重新定义

$$\eta^s = i\sigma^2 \xi^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xi^s \implies \eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

原因是对于反粒子, 自旋朝上其实对应朝下.

我们考首先考虑最简单的情况  $p$  平行与  $z$  轴,  $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$

$$u^{\sigma=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E+p_z} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{\sigma=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E-p_z} \end{pmatrix}, \quad v^{\sigma=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{E+p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E-p_z} \end{pmatrix}, \quad v^{\sigma=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p_z} \\ 0 \\ -\sqrt{E+p_z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

引入

$$\begin{aligned} [u^\sigma(p)]^* &= (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} \mathcal{T} u^{-\sigma}(\tilde{p}) \\ [v^\sigma(p)]^* &= (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} \mathcal{T} v^{-\sigma}(\tilde{p}) \end{aligned} \quad (4.112)$$

其中  $\mathcal{T} = \gamma^1 \gamma^3$ , 可以验证满足前面四个式子, 当然这个公式适用于任何方向.

再把这个结果代入之前的场算符中, 得到

$$\int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_{\sigma} \left( \xi_a^* (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{-\sigma} (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} \mathcal{T} u^{-\sigma}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot x_T} + \xi_b (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{-\sigma\dagger} (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} \mathcal{T} v^{-\sigma}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot x_T} \right) \quad (4.113)$$

由于  $\sigma$  只能取  $\pm\frac{1}{2}$ ,  $(-1)^{1-2\sigma}$  等于 1, 所以

$$\int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_{\tilde{p}}}} \sum_{\sigma} \left( \xi_a^* a_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-\sigma} \mathcal{T} u^{-\sigma}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot x_T} + \xi_b b_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-\sigma\dagger} \mathcal{T} v^{-\sigma}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot x_T} \right) \quad (4.114)$$

假设  $\xi_a^* = \xi_b$

$$|\xi_a| = |\xi_b| = 1 \implies \xi_b \xi_a = 1 \quad (4.115)$$

因此我们有

$$T\psi(x)T^{-1} = \xi_a^* \mathcal{T} \psi(x_T) \quad (4.116)$$

$\mathcal{T}$  矩阵的性质

$$\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1} = -\mathcal{T}, \quad \mathcal{T}(\gamma^\mu)^* \mathcal{T}^{-1} = \gamma_\mu \quad (4.117)$$

则

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}(x)T^\dagger &= (T^\dagger)^\dagger \psi(x)^\dagger (T)^\dagger (\gamma^0)^* = (T\psi(x)T^\dagger)^\dagger (\gamma^0)^* \\
&= (\xi_a^* \mathcal{T}\psi(x_T))^\dagger (\gamma^0)^* = \xi_a \psi^\dagger(x_T) \mathcal{T}^\dagger (\gamma^0)^* \mathcal{T} T^{-1} \\
&= \xi_a \bar{\psi}(x_T) \mathcal{T}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

对赝标量流作  $T$  变换

$$T\bar{\psi}i\gamma_5\psi T^{-1} = T\bar{\psi}T^{-1}Ti\gamma_5\psi T^{-1} = -iT\bar{\psi}T^{-1}\gamma_5^*T\psi T^{-1} = |\xi_a|^2 (-i)\bar{\psi}(x_T)\mathcal{T}^\dagger\gamma_5^*\mathcal{T}\psi(x_T) = -\bar{\psi}i\gamma_5\psi \tag{4.119}$$

而对于矢量流

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T^{-1} &= +\bar{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T) = \pm\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T) \\
\mu = 0, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T) &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T) \quad \mu = 1, 2, 3, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T) = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T)
\end{aligned} \tag{4.120}$$

对于 QED

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.121}$$

Lagrangian 在时间反演下不变, 由此我们有

$$TA_\mu T^{-1} = A^\mu \tag{4.122}$$

对于轴矢量流则有

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x_T) \tag{4.123}$$

对于左手流的变换

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi T^{-1} = \bar{\psi}\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x_T) \tag{4.124}$$

时间反演变换后变换后依然是左手流.

在标准模型中含有关于弱相互作用的项

$$\mathcal{L}_{cc} = \sum_{u_i=(u,c,t)} \sum_{d_j=(d,s,b)} V_{u_i v_j} \bar{u}^i(x)\gamma^\mu P_L d^j(x)W_\mu^+ + \text{h.c.} \tag{4.125}$$

在时间反演变化下并不为  $\mathcal{L}_{cc}(x_T)$ , 因为其中 CKM 矩阵  $V_{u_i v_j}$  有无法消除的复相角, 会破坏时间反演不变性.

## 4.7 电荷共轭变换

### 4.7.1 Dirac 方程的电荷共轭变换

电荷共轭变换也就是将粒子变为反粒子. 我们首先考虑 Dirac 方程, 电子在经典外电磁场的运动

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0 \tag{4.126}$$

这实际上是一个  $4 \times 1$  矩阵方程. 对于  $\bar{\psi}$  我们有

$$\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} + m) = 0 \tag{4.127}$$

这是一个  $1 \times 4$  的矩阵, 我们取转置可以回到  $4 \times 1$  的形式

$$\left[ i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - e(\gamma^\mu)^T A_\mu + m \right] \bar{\psi}^T = 0 \tag{4.128}$$

取矩阵  $\mathcal{C}$ , 满足 (实际上  $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$ )

$$\mathcal{C}(\gamma^\mu)^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu, \quad \psi^c(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x) \quad (4.129)$$

对前式插入  $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left[ i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - e(\gamma^\mu)^T A_\mu + m \right] \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}\bar{\psi}^T &= (-i\cancel{\partial} + e\cancel{A} + m)\psi^c(x) = 0 \\ \implies (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} + m)\psi^c(x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.130)$$

和一开始的方程的区别在于电荷变号, 相当于一个反粒子的波函数.

### 4.7.2 场算符的电荷共轭变换

考虑电荷共轭算符作用到单粒子态上

$$\mathcal{C} |\text{particle}, \mathbf{p}, \sigma\rangle = \xi_a |\text{antiparticle}, \mathbf{p}, \sigma\rangle, \quad \mathcal{C} |\text{antiparticle}, \mathbf{p}, \sigma\rangle = \xi_b |\text{particle}, \mathbf{p}, \sigma\rangle \quad (4.131)$$

电荷共轭算符作用到产生湮灭算符上有

$$\mathcal{C} a_{\mathbf{p}}^\sigma \mathcal{C}^{-1} = \xi_a^* b_{\mathbf{p}}^\sigma, \quad \mathcal{C} b_{\mathbf{p}}^\sigma \mathcal{C}^{-1} = \xi_b^* a_{\mathbf{p}}^\sigma \quad (4.132)$$

令  $\mathcal{C}$  为线性么正算符, 作用于 Dirac 场算符得到

$$\mathcal{C}\hat{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} [\xi_a^* b_{\mathbf{p}}^\sigma u^\sigma(p) e^{-ip \cdot x} + \xi_b a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} v^\sigma(p) e^{ip \cdot x}] \quad (4.133)$$

我们希望粒子的算符对应  $u(p)$ , 反粒子的算符对应  $v(p)$ , 而我们有

$$u(p) = i\gamma^2[v(p)]^*, \quad v(p) = i\gamma^2[u(p)]^* \quad (4.134)$$

可以用之前沿着  $z$  轴运动的例子来验证. 代入可得

$$\mathcal{C}\hat{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} = i\gamma^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} [\xi_a^* b_{\mathbf{p}}^\sigma [v^\sigma(p)]^* e^{-ip \cdot x} + \xi_b a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} [u^\sigma(p)]^* e^{ip \cdot x}] \quad (4.135)$$

而对于  $\bar{\psi}$  算符, 取转置乘以  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\bar{\psi}^T &= \mathcal{C}\gamma^0 \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} (a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} [u^\sigma(p)]^* e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\sigma [v^\sigma(p)]^* e^{-ip \cdot x}) \\ &= -\gamma^0 \mathcal{C} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma} (a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} [u^\sigma(p)]^* e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\sigma [v^\sigma(p)]^* e^{-ip \cdot x}) \end{aligned} \quad (4.136)$$

对比上述两式我们必须假设  $\xi_a^* = \xi_b$ , 则有

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = \xi_a^* i\gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^T = \xi_a^* \mathcal{C}\bar{\psi}^T, \quad \mathcal{C} = i\gamma^2 \gamma^0, \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} \quad (4.137)$$

还存在 Majorana Fermion (自己是自己的反粒子, 即电中性的.) 实 KG 场和复 KG 场的关系类似于 Majorana Fermion 和 Dirac Fermion.

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma_2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

自由度比 Dirac 场少了一半. 利用

$$C\psi(x)C^{-1} = \xi_a^* C\bar{\psi}^T(x) = \xi_a^* i\gamma^2 \psi^* \quad (4.139)$$

我们有

$$C\psi_M C^{-1} = \xi i\gamma^2 \psi_M^* = \xi i\gamma^2 \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ -i\sigma_2^* \psi_L \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \sigma_2 \sigma_2^* \psi_L \\ -i\sigma_2 \psi_L^* \end{pmatrix} = -\xi \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma_2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

即

$$C\psi_M C^{-1} = \xi \psi_M \quad (4.141)$$

即它的反粒子就是它自己.

接下来考虑 Dirac 场的双线性型在电荷共轭变换下的性质我们有

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}C^{-1} &= (C^\dagger)^\dagger \psi^\dagger C^\dagger \gamma^0 = (C\psi C^{-1})^\dagger \gamma^0 = (\xi_a^* C\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = -\xi_a \psi^T \gamma^0 C \gamma^0 = \xi_a \psi^T C \\ C\bar{\psi}\psi C^{-1} &= -\xi_a \psi^T C^\dagger \xi_a^* C\bar{\psi}^T = -\psi^T \bar{\psi}^T = (\bar{\psi}\psi)^T = \bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (4.142)$$

其中交换旋量场会有一个负号. 显式地写出来则有

$$-(\bar{\psi}\psi)^T = -\psi_a \bar{\psi}_a = \bar{\psi}_a \psi_a + \text{const} = \bar{\psi}\psi \quad (4.143)$$

对于赝标流和矢量流我们有

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}i\gamma_5\psi C^{-1} &= -i\psi^T \gamma_5^T \bar{\psi}^T = i\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C^{-1} &= \psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T = -(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^T = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (4.144)$$

对于赝矢流和左矢流我们有

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi C^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad -C\bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi C^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu P_R\psi \quad (4.145)$$

也就是说  $V - A$  相互作用破坏了电荷共轭对称性.

对于量子电动力学中的  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (满足在  $C$  变换下不变)

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu C^{-1} = C\bar{\psi}\gamma^\mu C^{-1} C\psi A_\mu C^{-1} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C A_\mu C^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (4.146)$$

则

$$C A_\mu C^{-1} = -A_\mu \quad (4.147)$$

因此光子的  $C$  宇称为  $-1$ .

#### Theorem 4.7.1 Furry 定理

初态  $n$  个光子, 末态  $m$  个光子, 则  $n + m$  必须是偶数, 即  $(-)^n = (-1)^m$ , 这是电荷共轭不变性的要求, 光子  $C$  宇称不变.

$C$  变换作用于单光子态, 有额外的负号.

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \quad (4.148)$$

$CPT$  定理

考虑  $CPT$  变换作用到场算符上

$$\begin{aligned}
 CPT\psi(x)(CPT)^{-1} &= CP\xi_a^*\gamma^1\gamma^3\psi(x_T)P^{-1}C^{-1} \\
 &= \xi_a^*\eta_a^*\gamma^1\gamma^3\gamma^0 C\psi(-x)C^{-1} \\
 &= \xi_a^*\eta_a^*\gamma^1\gamma^3\gamma^0 (\zeta_a^*C\gamma^0\psi^*(-x)) \\
 &= -\xi_a^*\zeta_a^*\eta_a^*\gamma_5\psi^*(-x)
 \end{aligned} \tag{4.149}$$

且  $CPT$  算符是反线性反么正算符, 因为具有奇数个反线性算符  $T$ .

**Theorem 4.7.2**  $CPT$  定理

对任意一个相对论性的 Local QFT, 满足 Poincaré 对称性 Hamiltonian 是 Hermite 的, 这个理论一定是  $CPT$  不变的.

$$CPT\mathcal{L}(x)(CPT)^{-1} = \mathcal{L}(-x) \tag{4.150}$$

物质 - 反物质不对称需要满足三个条件重子数守恒,  $C, CP$  破坏, 偏离热平衡,  $SM$  可以满足三个条件, 但是破坏的程度无法达到现实中的观测.

# Chapter 5

## 矢量场的量子化

我们最熟悉的矢量场就是电磁场, 电磁场满足 Maxwell 方程组, Lorentz 协变形式为

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

其中  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ,  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ .

在标量场中, 标量粒子只有 1 个自由度, 场也只有 1 个自由度. 在 Dirac 场中, 粒子有 4 个自由度 (正负电子, 自旋取向), 场也有 4 个自由度 (4 分量旋量), 但是电磁场对应的光子只有两个自由度 (两个极化方向),  $4 > 2$  这是我们遇到的问题, 我们随后来解决它, 我们首先处理有质量矢量场.

### 5.1 有质量矢量场

对于有质量矢量场, 我们首先类比标量场的量子化, 我们有

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = -\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)\phi + \text{surface} \quad (5.2)$$

其中 surface 代表表面项积分后为零. 类比标量场我们猜测有质量矢量场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}(A^\mu) = -\frac{1}{2}A_\mu(\partial^2 + m^2)A^\mu \quad (5.3)$$

注意质量项为

$$-\frac{1}{2}m^2((A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2) \quad (5.4)$$

在 Hamiltonian 中会反号, 但是我们希望在 Hamiltonian 中  $|\mathbf{A}|^2$  是正号, 因此我们取

$$\mathcal{L}(A^\mu) = \frac{1}{2}A_\mu(\partial^2 + m^2)A^\mu + \text{surface} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (5.5)$$

利用 Euler-Lagrange 方程, 我们有

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = m^2 A^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\partial^\nu A^\mu \implies (\partial^2 + m^2)A^\mu = 0 \quad (5.6)$$

也就是 K-G 方程, 这是符合预期的, 所有的场必须满足 K-G 方程. 接下来讨论这个理论的 Hamiltonian, 我们有

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\
 &= -\frac{1}{2} \dot{A}_\mu \dot{A}^\mu - \frac{1}{2} \partial_i A_\mu \partial_i A^\mu - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\
 &= \frac{1}{2} (|\dot{\mathbf{A}}|^2 + \partial_i A^j \partial_i A^j + m^2 |\mathbf{A}|^2) - \frac{1}{2} (m^2 A^0 A^0 + \partial_i A^0 \partial_i A^0 + m^2 (A^0)^2)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

可以看出能量没有下界, 因此不稳定, 这个理论就不合理.

我们来看这个理论有什么问题, 我们在构造 Dirac Lagrangian 时我们考虑了包含场的一阶导数和场本身的所有 Lorentz 不变量, 但是对于矢量场  $\partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu$  这样的 Lorentz 不变项还没有包含进来, 因此我们用待定系数法, 固定质量系数, 取 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = -\frac{a}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \frac{b}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \tag{5.8}$$

利用 Euler-Lagrange 方程, 我们有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = m^2 A^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} = -a \partial^\nu A^\mu - b \partial^\mu A^\nu \implies a \partial^2 A^\mu + b \partial^\mu (\partial \cdot A) + m^2 A^\mu = 0 \tag{5.9}$$

将  $\partial_\mu$  作用到上式, 我们有

$$a \partial^2 (\partial \cdot A) + b \partial^2 (\partial \cdot A) + m^2 \partial \cdot A = 0 \implies [(a+b) \partial^2 + m^2] (\partial \cdot A) = 0 \tag{5.10}$$

不妨假设  $a+b \neq 0$ , 那么我们有

$$\left( \partial^2 + \left( \frac{m}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right) (\partial \cdot A) = 0 \tag{5.11}$$

也就是说  $\partial \cdot A$  满足 K-G 方程, 代表着一个标量粒子, 质量为  $\frac{m}{\sqrt{a+b}}$ , 即矢量场的 4 个自由度其中一个代表着有质量的标量粒子, 其余 3 个自由度代表着有质量矢量粒子的 3 个极化状态. 这实际上说明矢量场和标量场耦合在一起, 但是如果这个标量粒子的质量很重, 在我们所考虑的能标下, 这个标量粒子是不会被激发的, 也就是标量粒子与矢量粒子退耦了, 我们就只需要考虑矢量粒子, 此时自由度为  $4-1=3$ , 这正好是我们所期望的. 因此我们希望这个标量粒子的质量为  $\infty$  即  $a+b=0$ , 此时我们有

$$m^2 (\partial \cdot A) = 0 \implies \partial \cdot A = 0 \tag{5.12}$$

这类似于电动力学中的 Lorentz 规范, 但是注意我们的 Lagrangian 并没有规范不变性, 此处的条件时我们忽略了标量极化得到的结果而不是 Lorentz 规范.

再回到 E-L 方程, 我们要求 E-L 方程为 K-G 方程, 我们有  $a=1, b=-1$  从而我们有

$$\begin{cases} (\partial^2 + m^2) A^\mu = 0 \\ \partial \cdot A = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

注意有两个方程, 第二个方程是我们选取的限制条件. 从而 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\
 &= -\frac{1}{4} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

现在我们再来看 Hamiltonian, 是否解决了能量没有下界的问题, 正则动量为

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^0 \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^0 \delta_\alpha^\mu) F^{\alpha\beta} = F^{\mu 0} \quad (5.15)$$

由于  $F^{\mu\nu}$  为反对称张量, 因此  $\pi^0 = 0$ , 从而 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = T^{00} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathcal{L} \quad (5.16)$$

利用

$$\pi^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = E^i, \quad -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (5.17)$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \left( \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} m^2 A_0^2 - \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \right) \\ &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \nabla A_0) - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} m^2 (A_0^2 + \mathbf{A}^2) - m^2 A_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} m^2 (A_0^2 + \mathbf{A}^2) + \nabla A_0 \cdot \mathbf{E} - m^2 A_0^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla A_0 \cdot \mathbf{E} - m^2 A_0^2 &= \nabla \cdot (A_0 \mathbf{E}) - A_0 \nabla \cdot \mathbf{E} - m^2 A_0^2 \\ &= \nabla \cdot (A_0 \mathbf{E}) - A_0 \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - m^2 A_0^2 \\ &= \nabla \cdot (A_0 \mathbf{E}) - A_0 \partial^2 A_0 + A_0 \partial^0 (\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) - m^2 A_0^2 \\ &= \nabla \cdot (A_0 \mathbf{E}) - A_0 (\partial^2 + m^2) A_0 + A_0 \partial^0 (\partial_\mu A^\mu) \end{aligned} \quad (5.19)$$

上式第一项为表面项, 积分为零, 第二项代入运动方程为零, 第三项由于我们施加的条件也为零, 因此上式对 Hamiltonian 没有贡献, 因此我们有

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} m^2 (A_0^2 + \mathbf{A}^2) \quad (5.20)$$

所以 Proca Lagrangian 对应的 Hamiltonian 是正定的.

为了量子化 Proca 理论, 我们需要对应的平面波解类比于 Dirac 场的平面波解, 我们有

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(p) e^{-ip \cdot x} \quad (5.21)$$

$\varepsilon_\mu(p)$  为极化矢量, 代入运动方程我们有

$$p^2 = m^2, \quad p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0 \quad (5.22)$$

第一项是在壳条件, 第二项是我们施加的限制说明极化矢量于动量垂直. 因此我们三个自由度, 这正好是我们所期望的. 现在我们来讨论极化矢量的具体形式.

(i) 当粒子静止时,  $p^\mu = (m, \mathbf{0})$

我们可以取极化矢量为  $\varepsilon_\mu^\lambda(p)$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ , 其中

$$\varepsilon_\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\mu^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

满足正交关系

$$\varepsilon^\lambda(p) \cdot \varepsilon^{\lambda'}(p) = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (5.24)$$

类比于电动力学中的极化矢量, 我们可以取圆偏振基, 即

$$\varepsilon^{(+)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^{(1)\mu} + i\varepsilon^{(2)\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(-)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^{(1)\mu} - i\varepsilon^{(2)\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

称为右旋和左旋极化矢量, 也就是横向极化矢量. 此时将第三个极化矢量称为  $\varepsilon_\mu^{(0)}$

(ii) 当粒子沿  $z$  轴运动时,  $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$

横向极化矢量不变, 在正交条件下, 纵向极化矢量为

$$\varepsilon^{(0)\mu} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

我们知道光子只有两个极化方向, 若期望有质量矢量场的质量为零时过渡到电磁场, 第三个极化方向应该消去, 但是这里第三个极化矢量出现奇异性, 无法直接过渡到  $m = 0$  的情况, 这也是我们量子化电子场的困难, 因为无论质量多么小, 始终有第三个极化方向,  $3 \neq 2$ .

(iii) 粒子沿任意方向运动时  $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$

此时极化矢量与粒子沿  $z$  轴运动时的极化矢量相差一个转动, 即

$$\varepsilon^{(\pm)\mu}(p) = R(\theta, \phi) \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^{(1)\mu}(0) \pm i\varepsilon^{(2)\mu}(0)), \quad \varepsilon^{(0)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{m} \\ \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

其中  $R(\theta, \phi)$  为转动矩阵.

极化矢量满足正交完备关系

$$\varepsilon^\lambda(p) \cdot \varepsilon^{\lambda'*}(p) = -\delta^{\lambda\lambda'}, \quad \sum_\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(p) \varepsilon_\nu^{\lambda'*}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \quad (5.28)$$

现在我们考虑无质量极限, 在高能过程中  $E \gg m, E \sim p \gg m$ , 第三个极化矢量为

$$\varepsilon^{(0)} \sim \frac{E}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

考虑  $W^\pm$  的产生, 散射截面为

$$\sigma \sim |\mathcal{M}|^2 \sim |g\varepsilon(p)|^2, \quad \sigma_T \sim g^2, \quad \sigma_L \sim g^2 \left(\frac{E}{m}\right)^2 \quad (5.30)$$

可见纵向极化在高能情况下会发散, 这说明我们无法直接过渡到无质量矢量场.

考虑 Proca 场的量子化, 我们仍旧采用等时量子化

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{x})] = ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.31)$$

由于  $\pi^0 = 0$ , 因此  $A^0$  实际上不是一个动力学变量, 利用 Proca 方程有

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0 \implies A^0 = -\frac{1}{m} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} \quad (5.32)$$

质量趋于零时也有奇异性, 为了解决奇异性, 我们利用 Stueckelberg 技巧. 我们知道 Maxwell 电磁场满足规范对称性, 显然 Proca 不满足规范对称性, 因此我们的主要思想就是引入一个新的场, 通过这个新的场使得 Proca 理论满足规范对称性. 由于 Proca 场中破坏规范对称性的部分就是质量项, 如果我们能够通过引入一个新的场, 得到一个满足规范对称性的理论, 那么我们期望这个理论在质量趋于零时能够过渡到 Maxwell 理论. 下面我们来具体讨论这个技巧.

首先假定场与一个外源耦合, 我们有

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - A_\mu j^\mu \quad (5.33)$$

引入一个新的标量场  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$ , 满足  $\partial_\nu \partial_\mu \phi = 0$ , 类似规范变换, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (A_\mu + \partial_\mu \phi)(A^\mu + \partial^\mu \phi) - j^\mu (A_\mu + \partial_\mu \phi) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (A_\mu + \partial_\mu \phi)(A^\mu + \partial^\mu \phi) - j^\mu A_\mu + \partial^\mu j_\mu \phi \end{aligned} \quad (5.34)$$

上式最后一个等号是由于分部积分, 散度积分为零. 此时 Lagrangian 满足规范对称性, 对应的规范变换为

$$\begin{cases} A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \\ \phi \rightarrow \phi - \alpha \end{cases} \quad (5.35)$$

变换后的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L} - j^\mu \partial_\mu \alpha - \partial_\mu j^\mu \phi \alpha, \quad \delta \mathcal{L} = 0 \implies \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.36)$$

也就是说外源为守恒流时, 该理论为规范不变的. 考虑质量项, 我们对场做一个标量变换, 不影响物理可观测量.  $\phi \rightarrow \phi/m$ , 对应的规范变换变为  $\phi \rightarrow \phi - m\alpha$ , 此时 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + m A_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - j^\mu A_\mu + (\partial^\mu j_\mu) \frac{\phi}{m} \quad (5.37)$$

由于守恒流, 在  $m \rightarrow 0$  时, 我们有

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \quad (5.38)$$

此时的自由度还是  $3 = 1 + 2$ , 在  $m \rightarrow 0$  时,  $\phi$  与  $A_\mu$  退耦, 我们可以不考虑  $\phi$ , 因此我们解决了 Proca 理论在零质量极限时的自由度不匹配的问题.

## 5.2 电磁场量子化

我们在之前讨论了有质量矢量场过渡到无质量矢量场的自由度不匹配问题, 现在我们来讨论电磁场的量子化. 首先电磁场的量子化遇到的第一个问题就是 Feynman 传播子, 电磁场的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} A_\mu (\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \quad (5.39)$$

从而有 Feynman 传播子的定义为

$$(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) D_F^{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y) \quad (5.40)$$

利用 Fourier 变换我们有

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho \quad (5.41)$$

由于  $\det(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) = 0$ , 因此该方程无解, 也就是说没有确定的 Feynman 传播子. 为了解决这个问题, 我们必须引入某种规范, 常见的有 Coulomb 规范与协变规范, Coulomb 规范是利用限制消去多余的自由度, 而协变规范是引入两种假的光子, 在可观测量中光子会相互抵消, 从而得到正确的结果. 我们这里讨论协变规范. 我们需要对 Lagrangian 作修改

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \quad (5.42)$$

E-L 方程为

$$\square A_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu (\partial \cdot A) = 0 \quad (5.43)$$

Feynman 传播子为

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu\right) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho \quad (5.44)$$

解得光子的 Feynman 传播子为

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} (-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \quad (5.45)$$

我们称为  $R_\xi$  规范,  $\xi = 1$  时为 Feynman 规范,  $\xi = 0$  时为 Landau 规范,  $\xi = \infty$  时为么正规,  $\xi = 3$  时为 Yennie 规范. 我们取  $\xi = 1$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2 \quad (5.46)$$

正则动量为

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}_\mu \quad (5.47)$$

此时  $\pi^0 \neq 0$ , 因此  $A^0$  是一个动力学变量, Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}}^2 + (\partial_i \mathbf{A})^2) - \frac{1}{2} (\dot{A}_0 + (\nabla A_0)^2) \quad (5.48)$$

等时对易关系为

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{y})] = ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \implies [A^\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_0(t, \mathbf{y})] = -ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.49)$$

其余对易子为零.

我们有平面波展开

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_\lambda (a_{\mathbf{k}}^\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} \varepsilon_\mu^{\lambda*}(k) e^{ik \cdot x}) \quad (5.50)$$

共有四个极化方向, 两个横向极化方向

$$\varepsilon_\mu^\pm(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

两个非物理极化方向, 时性极化与纵向极化

$$\varepsilon_{\mu}^0(k) = n_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\mu}^3(k) = (0, -\hat{\mathbf{k}}) = \frac{k_{\mu} - (k \cdot n)n_{\mu}}{k \cdot n} \quad (5.52)$$

四个极化矢量满足正交关系与完备性关系

$$\varepsilon^{\lambda}(k) \cdot \varepsilon^{\lambda'*}(k) = g^{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda} -g_{\lambda\lambda} \varepsilon_{\mu}^{\lambda}(k) \varepsilon_{\nu}^{\lambda*}(k) = -g_{\mu\nu} \quad (5.53)$$

将展开代入对易关系我们有

$$[a_{\mathbf{k}}^{\lambda}, a_{\mathbf{k}'}^{\lambda'\dagger}] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (5.54)$$

Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} (\pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} - \mathcal{L}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \sum_{\lambda} (-g_{\lambda\lambda}) (a_{\mathbf{k}}^{\lambda} a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} + a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\lambda}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \sum_{\lambda} (-g_{\lambda\lambda}) (2a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\lambda} - g^{\lambda\lambda} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0})) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} |\mathbf{k}| (-g_{\lambda\lambda}) a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\lambda} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2|\mathbf{k}| \end{aligned} \quad (5.55)$$

第二项为发散项, 可以通过正规编序消去. 可以看出时性光子对应的能量项前有负号, 说明这个能量还是无下限的, 并且这会带来一个 Hilbert 空间中负模态的问题. 规定真空态为  $a_{\mathbf{k}}^{\lambda} |0\rangle = 0$ , 单光子态为  $|\mathbf{k}, \lambda\rangle = \sqrt{2|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} |0\rangle$ , 满足  $H |\mathbf{k}, \lambda\rangle = |\mathbf{k}| |\mathbf{k}, \lambda\rangle$ , 真实的单光子态通常是多个频率光子的叠加

$$|1, \lambda\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} |0\rangle \quad (5.56)$$

是一个波包, 对这个波包做内积有

$$\langle 1, \lambda | 1\lambda \rangle = \int \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} f(\mathbf{k}) f^*(\mathbf{k}') \langle 0 | a_{\mathbf{k}}^{\lambda} a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |f(\mathbf{k})|^2 (-g^{\lambda\lambda}) \quad (5.57)$$

当  $\lambda = 0$  时  $-g^{00} = -1$  也就是说出现了负模态这与量子力学基本假设相违背, 因此我们需要引入约束条件, 即 Gupta-Bleuler 条件. 我们认为物理状态  $|\psi\rangle$  不是充满整个 Hilbert 空间, 而是在一定的物理所允许的子空间中, 显然真实的两个光子态一定处于这个子空间中. 我们规定这个子空间中的态满足

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{+} |\psi\rangle = 0 \implies \langle \psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{-} = 0 \quad (5.58)$$

也就是  $A_{\mu}$  的正频部分的 4 散度作用到物理态上为零, 利用平面波展开为

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{+} |\psi\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_{\lambda} a_{\mathbf{k}}^{\lambda} e^{-ik \cdot x} (-ik \cdot \varepsilon) |\psi\rangle = 0 \quad (5.59)$$

由于  $k^{\mu} = (|\mathbf{k}|, 0, 0, \mathbf{k})$  当  $\lambda = 1, 2$  时上式恒为零, 故上式只对  $\lambda = 0, 3$  做出了限制, 由于

$$k \cdot \varepsilon^{(0)} = k \cdot n = |\mathbf{k}|, \quad k \cdot \varepsilon^{(3)} = \frac{k^2 - (k \cdot n)^2}{k \cdot n} = -k \cdot n = -|\mathbf{k}| \quad (5.60)$$

将上式代入限制条件我们有

$$|\mathbf{k}| (a_{\mathbf{k}}^0 - a_{\mathbf{k}}^3) |\psi\rangle = 0 \implies a_{\mathbf{k}}^0 |\psi\rangle = a_{\mathbf{k}}^3 |\psi\rangle, \quad \langle \psi | a_{\mathbf{k}}^{0\dagger} = \langle \psi | a_{\mathbf{k}}^{3\dagger} \quad (5.61)$$

这样我们就可以讨论 Hamiltonian 的正定性了, 我们之前虽然指出 Hamiltonian 算符有一个负项, 但是能量需要 Hamiltonian 算符作用到物理态上, 考虑我们在此提出的物理态, 我们有

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \langle \psi | (-g_{\lambda\lambda}) | \mathbf{k} | a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\lambda} | \psi \rangle \quad (5.62)$$

考虑  $\lambda = 0, 3$  有

$$\langle \psi | a_{\mathbf{k}}^{3\dagger} a_{\mathbf{k}}^3 - a_{\mathbf{k}}^{0\dagger} a_{\mathbf{k}}^0 | \psi \rangle = \langle \psi | a_{\mathbf{k}}^{3\dagger} a_{\mathbf{k}}^3 - a_{\mathbf{k}}^{0\dagger} a_{\mathbf{k}}^0 | \psi \rangle = \langle \psi | (a_{\mathbf{k}}^{3\dagger} - a_{\mathbf{k}}^{0\dagger}) a_{\mathbf{k}}^3 | \psi \rangle = 0 \quad (5.63)$$

也就是说时性极化光子与纵向极化光子对 Hamiltonian 无贡献, 这样我们就解决了能量的无下界问题. 我们通过引入虚光子来解决电磁场量子化中自由度不匹配的问题, 那么这些虚光子对我们真实的物理态有影响吗? 我们通过一个约束条件将物理态  $|\psi\rangle$  限制在一定的范围内, 即

$$\langle \psi | \partial^{\mu} A_{\mu} | \psi \rangle = 0 \quad (5.64)$$

在这个允许的空间中我们可以将态矢表示为横向光子作用的态与虚光子作用的态的直积, 即

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (5.65)$$

定义

$$\alpha_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^0 - a_{\mathbf{k}}^3, \quad \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} = a_{\mathbf{k}}^{0\dagger} - a_{\mathbf{k}}^{3\dagger} \quad (5.66)$$

满足如下对易关系

$$\begin{aligned} [\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= [a_{\mathbf{k}}^0 - a_{\mathbf{k}}^3, a_{\mathbf{k}'}^{0\dagger} - a_{\mathbf{k}'}^{3\dagger}] \\ &= [a_{\mathbf{k}}^0, a_{\mathbf{k}'}^{0\dagger}] + [a_{\mathbf{k}}^3, a_{\mathbf{k}'}^{3\dagger}] \\ &= (-g^{00} - g^{33})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

因此  $|\phi\rangle = \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle$ , 满足  $\alpha_{\mathbf{k}} |\phi\rangle = \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle = 0$ , 实际上  $|\phi\rangle$  可以看做许多态的叠加, 即

$$|\phi\rangle = \prod_i (\alpha_{\mathbf{k}_i}^{\dagger})^{n_i} |0\rangle. \quad (5.68)$$

### 5.3 Feynman 传播子

对于电磁场我们同样可以构造 Feynman 传播子, 即

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T(A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot (x-y)} \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \varepsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon^{(\lambda)*\nu}(\mathbf{k}) \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{ik \cdot (x-y)} \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \varepsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon^{(\lambda)*\nu}(\mathbf{k}) \\ &= -g^{\mu\nu} D_F(x-y) \end{aligned} \quad (5.69)$$

在动量空间中有

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (5.70)$$

为了更好的理解电磁场 Feynman 传播子的物理意义, 我们将其重新写为极化矢量的求和形式, 即

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{F\mu\nu} &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{\sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{k})}{k^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[ \sum_{\lambda=T} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(0)*}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{\mu}^{(3)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(3)*}(\mathbf{k}) \right]\end{aligned}\quad (5.71)$$

考虑时性光子与纵向光子的极化矢量分别为

$$\varepsilon_{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}) = n_{\mu} = (1, \mathbf{0}), \quad \varepsilon_{\mu}^{(3)}(\hat{\mathbf{k}}) = (0, \mathbf{k}) = \frac{k_{\mu} - (k \cdot n)n_{\nu}}{k \cdot n} = \frac{k_{\mu} - (k \cdot n)n_{\mu}}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}} \quad (5.72)$$

代入前式得

$$\tilde{D}_{F\mu\nu} = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[ \sum_{\lambda=T} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) - n_{\mu} n_{\nu} + \frac{k_{\mu} - (k \cdot n)n_{\mu}}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}} \cdot \frac{k_{\nu} - (k \cdot n)n_{\nu}}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}} \right] \quad (5.73)$$

对后两项进行处理, 有

$$\begin{aligned}& -n_{\mu} n_{\nu} + \frac{k_{\mu} - (k \cdot n)n_{\mu}}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}} \cdot \frac{k_{\nu} - (k \cdot n)n_{\nu}}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}} \\ &= \frac{k_{\mu} k_{\nu} - (k \cdot n)(k_{\mu} n_{\nu} + k_{\nu} n_{\mu}) + (k \cdot n)^2 n_{\mu} n_{\nu} - (k \cdot n)^2 n_{\mu} n_{\nu} + k^2 n_{\mu} n_{\nu}}{(k \cdot n)^2 - k^2} \\ &= \frac{k_{\mu} k_{\nu} - (k \cdot n)(k_{\mu} n_{\nu} + k_{\nu} n_{\mu}) + k^2 n_{\mu} n_{\nu}}{(k \cdot n)^2 - k^2}\end{aligned}\quad (5.74)$$

因此我们可以将 Feynman 传播子写为

$$\tilde{D}_{F\mu\nu} = \tilde{D}_{F\mu\nu}^T(k) + \tilde{D}_{F\mu\nu}^C(k) + \tilde{D}_{F\mu\nu}^R(k) \quad (5.75)$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{F\mu\nu}^T(k) &= \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=T} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) \\ \tilde{D}_{F\mu\nu}^C(k) &= \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k^2 n_{\mu} n_{\nu}}{(k \cdot n)^2 - k^2} \\ \tilde{D}_{F\mu\nu}^R(k) &= \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k_{\mu} k_{\nu} - (k \cdot n)(k_{\mu} n_{\nu} + k_{\nu} n_{\mu})}{(k \cdot n)^2 - k^2}\end{aligned}\quad (5.76)$$

考虑  $\tilde{D}_{F\mu\nu}^C(k)$ , 我们有

$$\tilde{D}_{F\mu\nu}^C(k) = \frac{i n_{\mu} n_{\nu}}{(k \cdot n)^2 - k^2} = \frac{i n_{\mu} n_{\nu}}{|\mathbf{k}|^2} = \frac{i \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{|\mathbf{k}|^2} \quad (5.77)$$

从坐标表象来看这一部分, 我们有

$$\begin{aligned}D_{F\mu\nu}^C(x-y) &= \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{i}{|\mathbf{k}|^2} = \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-ik^0(x_0-y_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{i}{|\mathbf{k}|^2} \\ &= \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{i}{|\mathbf{k}|^2} = \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \frac{i}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\end{aligned}\quad (5.78)$$

可以看出这就是电磁场的 Coulomb 势,  $\delta(x_0 - y_0)$  表明了这是一个瞬时相互作用, 这也是经典电磁场理论中所认为的超距相互作用。

我们有 Coulomb 能量为

$$E_C = -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \delta(x_0 - y_0) \frac{j^0(t, \mathbf{x}) j^0(t, \mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (5.79)$$

也就是说我们考虑超距相互作用的话可以从量子场论回到经典电磁理论中.

同样我们可以考虑  $\tilde{D}_{F\mu\nu}^R(k)$ , 所对应的能量为

$$E_R \propto \int d^4x d^4y j_1^\mu(x) D_{F\mu\nu}^R(x-y) j_2^\nu(y) \sim \int d^4k \tilde{j}_1^\mu(k) \tilde{D}_{F\mu\nu}^R(k) \tilde{j}_2^\nu(-k) \quad (5.80)$$

由于守恒流的要求

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \rightarrow k_\mu \tilde{j}^\mu = 0 \quad (5.81)$$

因此  $E_R = 0$ , 也就是说这一部分不贡献. 因此可以忽略.

# Chapter 6

## 相互作用场论

在经典场论中我们可以加入相互作用项.

**Example 6.0.1** (经典场论中的相互作用项)

(i)  $\phi^3$  相互作用

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}} - \frac{1}{3!}g\phi^3 \implies (\square + m^2)\phi = -\frac{1}{2}g\phi^3 \quad (6.1)$$

(ii)  $\phi^4$  相互作用

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}} - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \implies (\square + m^2)\phi = -\frac{1}{6}\lambda\phi^3 \quad (6.2)$$

(iii) Yukawa 相互作用

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\psi\phi \quad (6.3)$$

我们的 QED 的 Lagrangian 就是一个具有 Yukawa 耦合项的理论

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned} \quad (6.4)$$

考虑 Maxwell 场与矢量流  $j^\mu$  耦合

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej^\mu A_\mu \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu, \quad \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = e\partial_\nu j^\nu = 0 \quad (6.5)$$

即 Maxwell 电磁场必须与守恒流耦合. 还可以从规范不变性看出

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \rightarrow \delta\mathcal{L} = -ej^\mu \partial_\mu \alpha(x) = -e\partial_\mu(j^\mu \alpha(x)) + \partial_\mu j^\mu \alpha(x) \quad (6.6)$$

规范不变性要求  $\delta\mathcal{L} = 0$ , 上式第一项为散度项因此  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

我们知道电磁场具有规范对称性, 我们要求电磁场与 Dirac 场耦合后也具有规范不变性. 即

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \quad (6.7)$$

由此我们必须引入协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (6.8)$$

此时  $D_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi$

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha)e^{i\alpha(x)}\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \quad (6.9)$$

也就是说规范不变性要求必须有相互作用项出现, 也就是说在规范不变性的要求下不会有自由的 Dirac 场与电磁场同时出现, 一定会有相互作用.

此时 QED 的 E-L 方程为

$$(i\cancel{D} - m)\psi = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (6.10)$$

还可以考虑标量 QED

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CKG}} &= \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* \\ \mathcal{L}_{\text{SQED}} &= \mathcal{L}_{\text{CKG}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

同样利用协变导数有

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_{\text{CKG}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} - eA_\mu i(\partial^\mu\phi\phi^* - \phi\partial^\mu\phi^*) + e^2\phi\phi^* A_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (6.12)$$

在经典场论中相互作用项将运动方程变为非线性方程, 但是在量子场论中就变得非常复杂. 例如  $\phi^3$  理论, 如果用产生湮灭算符展开在相互作用项中会出现产生湮灭算符的 3 次项. 这就使得理论变得非常复杂. 我们无法解析计算只能考虑微扰计算, Hamiltonian 为

$$H = H_0 + V, \quad [H_0, V] \neq 0, \quad \implies [H, H_0] \neq 0 \quad (6.13)$$

也就是说相互作用下的  $H$  与  $H_0$  不可以共同对角化, 也就是没有共同本征态. 设相互作用真空为  $|\Omega\rangle$ , 自由场论的真空为  $|0\rangle$ , 微扰论要求  $\langle 0|\Omega\rangle \sim 0$ .

## 6.1 $S$ 矩阵

在具体讨论微扰计算之前, 我们首先引入  $S$  矩阵.  $S$  矩阵可以与物理上的可观测量联系起来. 如散射截面、衰变分支比等.

### Definition 6.1.1: $S$ 矩阵

$S$  矩阵定义为入态与出态的内积

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle_H \quad (6.14)$$

其中  $|\alpha, \text{in}\rangle$  为渐近入态,  $\langle \beta, \text{out} |$  为渐近出态.  $H$  代表 Heisenberg 绘景.

$|\alpha, \text{in}\rangle, |\beta, \text{out}\rangle$  包含了对应态的所有时空演化历史, 是相互作用下的本征态.

$$H|\alpha, \text{in}\rangle = E_\alpha|\alpha, \text{in}\rangle, \quad H|\beta, \text{out}\rangle = E_\beta|\beta, \text{out}\rangle \quad (6.15)$$

对应的自由场论的本征态为  $|\phi_\alpha\rangle, |\phi_\beta\rangle$ , 满足

$$H_0|\phi_\alpha\rangle = E_\alpha|\phi_\alpha\rangle, \quad H_0|\phi_\beta\rangle = E_\beta|\phi_\beta\rangle \quad (6.16)$$

用自由场论的本征态表示为

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | \hat{S} | \alpha \rangle \quad (6.17)$$

$\hat{S}$  为  $S$  算符, 包含了所有的相互作用.

**Claim 6.1.1**  $S$  矩阵的性质

$S$  矩阵具有如下性质

- (i)  $S$  矩阵是么正矩阵 (几率守恒)  
考虑入态和出态的完备性关系

$$\mathbf{1} = \sum_{\alpha} |\alpha, \text{in}\rangle \langle \alpha, \text{in}| = \sum_{\beta} |\beta, \text{out}\rangle \langle \beta, \text{out}| \quad (6.18)$$

那么

$$(S^\dagger S)_{\gamma\alpha} = S_{\gamma\beta}^\dagger S_{\beta\alpha} = S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \langle \gamma, \text{in} | \beta, \text{out}\rangle \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in}\rangle = \langle \gamma, \text{in} | \alpha, \text{in}\rangle = \delta_{\gamma\alpha} \quad (6.19)$$

对于  $SS^\dagger$  同理.

- (ii)  $S$  矩阵体现了理论的所有对称性.

- (1) Lorentz 对称性

插入恒等算符  $\mathbf{1} = U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)$  到  $S_{\beta\alpha}$  中

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in}\rangle = \langle \beta, \text{out} | U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda) | \alpha, \text{in}\rangle = \langle U(\Lambda)\beta, \text{out} | U(\Lambda)\alpha, \text{in}\rangle \quad (6.20)$$

也就是说对入态和出态做 Lorentz 变换  $S$  矩阵不变,  $S$  矩阵反应了系统的 Lorentz 对称性.

- (2) 时空平移对称性

Lorentz 变换加上时空平移构成 Poincaré 变换  $U(\Lambda, a)$ , 时空平移变换为  $U(1, a) = e^{-ia_\mu \hat{P}^\mu}$ , 考虑  $e^+(p_1)e^-(p_2) \rightarrow \mu^+(p_3)\mu^-(p_4)$ , 在时空平移下

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in}\rangle = \langle \beta, \text{out} | e^{ia_\mu \hat{P}^\mu} e^{-ia_\mu \hat{P}^\mu} | \alpha, \text{in}\rangle \\ &= \langle \beta, \text{out} | e^{ia_\mu (p_3^\mu + p_4^\mu)} e^{-ia_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu)} | \alpha, \text{in}\rangle \\ &= e^{-ia_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu)} S_{\beta\alpha} \implies p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu \end{aligned} \quad (6.21)$$

也就是能量守恒.

- (3)  $U(1)$  内禀对称性

我们之前已经知道  $U(1)$  内禀对称性对应着电荷守恒, 在  $S$  矩阵中也可以得到同样的结论, 做  $U(1)$  变换  $U(\theta) = e^{-i\theta\hat{Q}}$ , 有

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle \beta, \text{out} | e^{i\theta\hat{Q}} e^{-i\theta\hat{Q}} | \alpha, \text{out}\rangle \\ &= e^{-i\theta(Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4)} S_{\beta\alpha} \implies Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

$S$  矩阵是由  $|\alpha, \text{in}\rangle$  与  $|\beta, \text{out}\rangle$  的内积来定义了, 由此我们可以定义  $S$  算符, 将初态和末态的自由态联系起来

$$S_{\beta,\alpha} = \langle \phi_\beta | S | \phi_\alpha \rangle \quad (6.23)$$

$S$  算符是么正的, 并且体现了系统的所有对称性.  $S$  的么正性与光学定理有关, 设

$$S = I + iT \quad (6.24)$$

其中  $I$  是恒等算符, 代表没有相互作用发生, 我们不关心  $T$  代表着相互作用, 则  $S$  的么正性要求

$$SS^\dagger = (1 + iT)(1 - iT^\dagger) = 1 - i(T^\dagger - T) + TT^\dagger = 1 \implies TT^\dagger = i(T^\dagger - T) \quad (6.25)$$

$TT^\dagger$  与总截面有关,  $i(T^\dagger - T)$  与向前散射振幅的虚部有关, 这就是光学定理.

我们需要将  $S$  矩阵与散射截面、衰变率等实验可测量联系起来, 由此我们定义不变振幅

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) i\mathcal{M}_{\beta\alpha} \quad (6.26)$$

其中  $S_{\beta\alpha}$  为出态到末态的跃迁振幅,  $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$  为不变振幅, 与相互作用有关, 我们通常关心初末态不同的散射过程因此主要考虑不变振幅. 利用跃迁振幅与跃迁概率的关系可得  $\alpha$  态到  $\beta$  态的概率为

$$P_{\beta\alpha} \propto |S_{\beta\alpha}|^2 \propto |\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)|^2 = \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \delta^{(4)}(0) \quad (6.27)$$

包含  $\delta$  函数也就是无穷大项但实验家不可能测出无穷大. 为解决这一问题, 有两种做法.

(i) 严格地处理散射, 采用波包 (wave packets)

(ii) 取有限体积也就是箱归一化把系统放入体积为  $L^3$  的正方体中.

我们采用第二种方法, 在箱归一化下离散化的动量为  $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$ , 根据动量  $\delta$  函数的定义

$$\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \quad (6.28)$$

也就是从连续的  $\delta$  函数变为了离散的 Kronecker  $\delta$  符号.

我们为此还需要定义 Box 中的单粒子态, 原来单粒子态内积为

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (6.29)$$

为了使  $S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}$  有几率诠释, 我们定义

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle_{\text{Box}} = \delta_{\mathbf{p}' - \mathbf{p}} \quad (6.30)$$

这样就有

$$\langle \psi_\beta | \psi_\alpha \rangle_{\text{Box}} = \delta_{\beta\alpha} \quad (6.31)$$

从而使得  $S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}$  有直接的几率诠释.

那么且 Box 的态和原来的单粒子态的关系为

$$|\mathbf{p}\rangle_{\text{Box}} = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} |\mathbf{p}\rangle \quad (6.32)$$

对于多粒子态 (初态有  $N_\alpha$  个粒子, 末态有  $N_\beta$  个粒子), 则有

$$|\psi_\alpha\rangle_{\text{Box}} = V^{-\frac{N_\alpha}{2}} \prod_{i=1}^{N_\alpha} (2E_i)^{-\frac{1}{2}} |\psi_\alpha\rangle, \quad |\psi_\beta\rangle_{\text{Box}} = V^{-\frac{N_\beta}{2}} \prod_{i=1}^{N_\beta} (2E_i)^{-\frac{1}{2}} |\psi_\beta\rangle \quad (6.33)$$

则

$$S_{\beta\alpha}^{\text{Box}} = {}_{\text{Box}} \langle \psi_\beta | \psi_\alpha \rangle_{\text{Box}} = V^{-\frac{N_\alpha + N_\beta}{2}} \prod_{i=1}^{N_\alpha} (2E_i)^{-\frac{1}{2}} \prod_{f=1}^{N_\beta} (2E_f)^{-\frac{1}{2}} S_{\beta\alpha} \quad (6.34)$$

由于我们实际上关心的是单位时间的跃迁几率, 因此需要在时间维度上加入时间盒子, 在  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  区间内相互作用存在, 在时间盒子里定义能量  $\delta$  函数, 则在  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  区间内有

$$\delta(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t} = \frac{T}{2\pi} \delta_{E_\alpha E_\beta} \quad (6.35)$$

与动量情况类似, 也从连续的  $\delta$  函数变为了离散的 Kronecker  $\delta$  符号. 我们之前的无穷大的  $\delta$  函数就变为了

$$|\delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta)|^2 = \delta^4(p_\alpha - p_\beta) \frac{VT}{(2\pi)^4} \quad (6.36)$$

此时跃迁几率为

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}|^2 = V^{-(N_\alpha + N_\beta)} \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{1}{2E_i} \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{1}{2E_f} |S_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.37)$$

由于实验上探测器对末态粒子的动量测量分辨率有限, 实际上我们只能测量  $\alpha \rightarrow \beta + d\beta$  的跃迁几率  $dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta)d\beta$ . 由于

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \implies \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dp_1 dp_2 dp_3 \implies \Delta \mathbf{n} = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p} \quad (6.38)$$

也就是离散动量态的数目和动量的关系. 所以我们有

$$d\beta = dN_\beta = \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_f \quad (6.39)$$

即在  $\mathbf{p} + d^3 \mathbf{p}$  区间内动量态的数目, 则跃迁几率为

$$\begin{aligned} dP(\alpha \rightarrow \beta) &= P(\alpha \rightarrow \beta)d\beta \\ &= V^{-(N_\alpha + N_\beta)} \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{1}{2E_i} \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{1}{2E_f} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}_f |S_{\beta\alpha}|^2 \\ &= V^{-(N_\alpha)} \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{1}{2E_i} \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} |S_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

考虑  $S$  矩阵的非平庸部分, 我们有

$$|S_{\beta\alpha}|^2 = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) \delta_V^3(0) \delta_T(0) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) VT |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.41)$$

微分跃迁概率为

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = V^{1-(N_\alpha)} T |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{1}{2E_i} \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (6.42)$$

说明跃迁概率和时间  $T$  明显相关, 但实验更关心跃迁速率, 即单位时间的跃迁概率, 因此我们定义跃迁速率

$$dW(\alpha \rightarrow \beta) = \frac{dP(\alpha \rightarrow \beta)}{T} = V^{1-(N_\alpha)} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{1}{2E_i} \prod_{f=1}^{N_\beta} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (6.43)$$

其中  $\prod_{f=1}^{N_\beta} (2E_f)^{-1} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \rightarrow d\Pi_{N_\beta}$ , 即相对论不变的  $N_\beta$  体末态相空间.

对于不同的  $N_\alpha, N_\beta$ , 跃迁速率与不变振幅的关系都不同, 我们通常只关心  $N_\alpha = 1, 2$ .

(i) 单粒子衰变

$$N_\alpha = 1, dW(\alpha \rightarrow \beta) = \frac{1}{2E_\alpha} d\Pi_{N_\beta} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.44)$$

物理中代表一个粒子的衰变, 例如  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ , 初态如果只有一个粒子常用衰变宽度  $d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)$  代替  $dW(\alpha \rightarrow \beta)$ , 且由于  $E_\alpha$  不是相对论不变的, 则粒子的衰变宽度和参照系有关. 实验上测得都是粒子静止系的衰变宽度. 总宽度为

$$\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = \frac{1}{2E_\alpha} \int d\Pi_{N_\beta} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.45)$$

考察不稳定粒子数的变化率,

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\Gamma n(t) \rightarrow n(t) = n(0)e^{-\Gamma t} \quad (6.46)$$

不稳定粒子是指数衰减的, 且不稳定粒子的寿命为

$$\tau = \frac{1}{n(0)} \int_0^\infty t \left| \frac{dn(t)}{dt} \right| dt = \frac{1}{\Gamma} \quad (6.47)$$

相当于对所有的粒子存在的时间求平均, 从而求得平均寿命.

(ii) 双粒子散射实验

$$N_\alpha = 2, dW(\alpha \rightarrow \beta) = \frac{1}{V} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} d\Pi_{N_\beta} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.48)$$

上式中出现了  $1/V$  的因子, 如何解决这个问题呢? 我们首先考虑散射实验, 散射实验通过束流对撞, 对撞事例数正比于对撞时间以及束流强度

$$dN \propto \text{time}, \quad dN \propto \text{flux} \quad (6.49)$$

因此我们可以定义散射截面

$$\text{cross section : } d\sigma := \frac{dN}{\text{time} \times \text{flux}} \quad (6.50)$$

也就是单位时间单位流强的事例数, 具有面积的量纲.

为了更简化这个问题, 我们先考虑固定靶实验, 即入射粒子只有一个, 则粒子数密度为  $n = \frac{1}{V}$ , 回忆电磁学中的电流强度, 我们有

$$\text{flux} = \phi_\alpha = \rho \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{V} \quad (6.51)$$

固定靶实验取  $|\mathbf{v}|$ , 有

$$d\sigma = \frac{dN}{T \times \phi_\alpha} = \frac{dW}{\phi_\alpha} = \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1|} d\Pi_{N_\beta} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.52)$$

可以推广到对撞实验, 则有

$$d\sigma = \frac{dN}{T \times \phi_\alpha} = \frac{dW}{\phi_\alpha} = \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} d\Pi_{N_\beta} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (6.53)$$

粒子间的相对速度并不是 Lorentz Boost 不变的, 而  $E_1, E_2$  也不是 Boost 不变的, 但是

$$\begin{aligned} (2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= 4E_1 E_2 \left| \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2} \right| \\ &= 4(|\mathbf{p}_1| E_2 + |\mathbf{p}_2| E_1) \\ &= 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \end{aligned} \quad (6.54)$$

是一个 Lorentz Boost 不变量, 因此散射截面是一个 Lorentz Boost 不变量. 所以我们有

$$d\sigma(1+2 \rightarrow \beta) = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 d\Pi_{N_\beta} \quad (6.55)$$

最后计算一下两体相空间, 且  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, E_1 + E_2 = E_{CM}$

$$\begin{aligned} d\Pi_2 &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d\Omega d|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_1|^2}{E_1 E_2} \frac{1}{E_2} \delta(E_1 + E_2 - E_{CM}) \\ \frac{d(E_1 + E_2 - E_{CM})}{d|\mathbf{p}_1|} &= \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_2} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} |\mathbf{p}_1| \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \frac{d|\mathbf{p}_1|}{d(E_1 + E_2 - E_{CM})} d(E_1 + E_2 - E_{CM}) \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - E_{CM}) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega d(E_1 + E_2 - E_{CM}) \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1 + E_2} \delta(E_1 + E_2 - E_{CM}) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} \end{aligned} \quad (6.56)$$

最后得到散射截面公式

$$\begin{aligned} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) &= \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} \\ \frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} &= \frac{1}{16\pi^2 (2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{CM}} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned} \quad (6.57)$$

### 6.1.1 老式微扰论

为了计算  $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$  我们需要使用微扰论, 微扰论分为基于 Hamiltonian 的老式微扰论和基于 Lagrangian 的协变微扰论. 协变微扰论计算较为简单, 但是老式微扰论更加直观, 我们先来介绍老式微扰论. 我们将入态和出态记为  $|\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle$  为总的  $H$  的本征态

$$H |\psi^\pm\rangle = E |\psi^\pm\rangle \quad (6.58)$$

将自由 Hamiltonian 记为  $H_0$ , 对应的本征态为  $|\phi\rangle$  相互作用项视为微扰  $V$  则有

$$H = H_0 + V, \quad H_0 |\phi\rangle = E_0 |\phi\rangle, \quad (E - H_0) |\psi\rangle = V |\psi\rangle \quad (6.59)$$

我们的基本思想就是利用  $|\phi\rangle$  来表示  $|\psi\rangle$ , 即利用非微扰的态的线性叠加来表示微扰的态, 以及对应的能量. 我们认为  $E \sim E_0$  由此有

$$(E - H_0) |\phi\rangle = 0 \implies (E - H_0) |\psi\rangle = V |\psi\rangle + (E - H_0) |\phi\rangle \implies |\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle \quad (6.60)$$

插入一个恒等算符

$$\frac{1}{E - H_0} = \frac{1}{E - H_0} \sum_n |n\rangle \langle n| = \sum_n \frac{1}{E - E_n} |n\rangle \langle n| \quad (6.61)$$

在  $E = E_n$  处发散, 我们可以利用在传播子中的技巧, 在  $E = E_n$  处引入一个虚部  $\epsilon$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{V}{E - H_0 \pm i\epsilon} |\psi^\pm\rangle + |\phi\rangle \quad (6.62)$$

定义  $V|\psi\rangle = T|\phi\rangle$ ,  $T$  为跃迁矩阵, 则有

$$V|\psi\rangle = T|\phi\rangle = V|\phi\rangle + V\frac{1}{E-H_0}T|\phi\rangle \implies T = V + V\frac{1}{E-H_0}T \quad (6.63)$$

这是一个迭代方程, 我们可以将其写成

$$T = V + V\frac{1}{E-H_0}V + V\frac{1}{E-H_0}V\frac{1}{E-H_0}V + \dots \quad (6.64)$$

我们可以求跃迁矩阵元

$$\langle\phi_f|T|\phi_i\rangle = V_{fi} + \sum_n V_{fn}\frac{1}{E-E_n}V_{ni} \quad (6.65)$$

这其实就是量子力学中得到微扰论, 由此我们可以求得  $S$  矩阵到任意阶.

## 6.2 相互作用绘景

在协变微扰论中, 为了计算  $S$  算符, 引入相互作用绘景. 我们规定在  $t=0$  时刻, 三个绘景是相同的, 即

$$t=0, \quad |\psi(0)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_I \quad (6.66)$$

在 Schrödinger 绘景中, 态矢的演化满足 Schrödinger 方程, 算符不含时

$$O_s(t) = O_s(0), \quad i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = H|\psi(t)\rangle_S \quad (6.67)$$

在 Heisenberg 绘景中, 态矢不含时, 算符演化满足 Heisenberg 方程

$$i\dot{O}_H(t) = [O_H(t), H], \quad |\psi(t)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_H \quad (6.68)$$

对于相互作用绘景, 我们定义

$$H = H_0 + V, \quad i\dot{O}_I(t) = [O_I(t), H_0], \quad |\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t}|\psi(t)\rangle_S \quad (6.69)$$

也就是说在相互作用绘景中, 算符的演化只与自由 Hamiltonian 有关. 由于实际上的物理结果并不依赖于绘景

$$\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi(t)|O_H(t)|\psi(t)\rangle_H = \langle\psi(t)|O_I(t)|\psi(t)\rangle_I = \langle\psi(t)|e^{-iH_0t}O_Ie^{iH_0t}|\psi(t)\rangle_S \quad (6.70)$$

因此我们有

$$O_I = e^{iH_0t}O_Se^{-iH_0t} \quad (6.71)$$

将  $e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t)\rangle_S$  代入 Schrödinger 方程, 得到

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}(e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I) &= He^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle \\ H_0e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I + ie^{-iH_0t}\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= (H_0(0) + V(0))e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle \\ i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= V_I(t)|\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (6.72)$$

其中  $V_I(t) = e^{iH_0t}V(0)e^{-iH_0t}$ , 即相互作用绘景中的态矢演化只依赖于相互作用 Hamiltonian.

接下来让我们考虑相互作用绘景下的时间演化算符, 我们取初态为  $t = -\infty$  时刻的态矢, 即

$$|i\rangle = |\psi(t = -\infty)\rangle_I \quad (6.73)$$

满足

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (6.74)$$

由此我们可以定义  $S$  算符

$$|\psi(\infty)\rangle = \hat{S} |\psi(t = -\infty)\rangle = \hat{S} |i\rangle = U(\infty, -\infty) |i\rangle \quad (6.75)$$

接下来我们就是要求解  $U(\infty, -\infty)$ , 通过  $i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$  可以假定解为

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t dt_1 V_I(t_1) |\psi(t_1)\rangle_I \quad (6.76)$$

相当于我们将一个微分方程变为了积分方程, 可以利用迭代, 将  $|\psi(t_1)\rangle_I$  继续展开.

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 V_I(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) |i\rangle + \dots \quad (6.77)$$

而

$$\hat{S} |i\rangle = |\psi(t)\rangle_I \rightarrow \hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \quad (6.78)$$

我们可已将其改写为 Dyson 级数的形式, 首先考虑如下的积分

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] \quad (6.79)$$

其中  $T[\dots]$  表示编时乘积, 即将算符按时间顺序排列

$$T[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] = V_I(\sigma_1^i) V_I(\sigma_2^i) \dots V_I(\sigma_n^i) \quad (6.80)$$

其中  $\sigma^i$  是  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的一个排列, 使得  $\sigma_1^i > \sigma_2^i > \dots > \sigma_n^i$ , 则共有  $n!$  个排列. 代入可得

$$I_n = \sum_{i=1}^{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1^i \int_{-\infty}^{\sigma_1^i} d\sigma_2^i \dots \int_{-\infty}^{\sigma_{n-1}^i} d\sigma_n^i V_I(\sigma_1^i) V_I(\sigma_2^i) \dots V_I(\sigma_n^i) \quad (6.81)$$

所有的积分变量都是实变量, 可以任意交换, 所以

$$I_n = n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \quad (6.82)$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) = \frac{1}{n!} I_n \quad (6.83)$$

因此我们有

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] \quad (6.84)$$

也就是 Dyson 级数, 类似于指数函数展开, 我们可以简写为

$$\hat{S} = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t) \right] \quad (6.85)$$

这个公式不仅适用于量子场论也适用于其它量子体系. 对于量子场论我们有

$$V_I(t) = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}_{\text{int}}^I(t, \mathbf{x}) \quad (6.86)$$

因此我们有

$$\hat{S} = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}^I(x) \right\} \quad (6.87)$$

我们之前曾经提过  $S$  算符应该满足体系的所有对称性, 因此应该是 Lorentz 不变的, 但是这里涉及到了编时乘积也就是算符时间的先后顺序, 是否还是 Lorentz 不变的呢? 首先对于类时间隔, Lorentz 变换不改变时间的先后顺序, 因此编时乘积是 Lorentz 不变的, 而对于类空与类光间隔, 不同时间的算符是对易的, 因此编时乘积也不影响, 因此  $S$  算符是 Lorentz 不变的.

今后我们默认算符都是在相互作用绘景下的, 因此我们不再标记  $I$ .

### 6.3 Wick 定理

场算符总可以写成两个部分, 即正频和负频部分.

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (6.88)$$

其中

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}, \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \quad (6.89)$$

因此编时乘积可以写为

(i)  $x^0 > y^0$ ,

$$\begin{aligned} T[\phi(x)\phi(y)] &= [\phi^+(x) + \phi^-(x)][\phi^+(y) + \phi^-(y)] \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] + \phi^-(x)\phi^-(y) \end{aligned} \quad (6.90)$$

(ii)  $x^0 < y^0$

$$\begin{aligned} T[\phi(x)\phi(y)] &= [\phi^+(y) + \phi^-(y)][\phi^+(x) + \phi^-(x)] \\ &= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^+(y)\phi^-(x) + \phi^-(y)\phi^-(x) \\ &= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + [\phi^+(y), \phi^-(x)] + \phi^-(y)\phi^-(x) \end{aligned} \quad (6.91)$$

我们可以定义缩并 (contraction) 为

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)], & x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)], & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (6.92)$$

由于缩并实际上是湮灭算符与产生算符的对易子因此缩并是一个数. 我们可以将编时乘积写为

$$T(\phi(x)\phi(y)) = N(\phi(x)\phi(y)) + \overline{\phi(x)\phi(y)} \quad (6.93)$$

由于正规编序后算符的真空期望值为零, 因此我们有

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\phi(x)\phi(y)} | 0 \rangle \quad (6.94)$$

实际上我们可以证明如下定理

**Theorem 6.3.1** Wick 定理

$$T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) = N \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) + \text{all possible contraction} \} \quad (6.95)$$

**Example 6.3.1** ( $n = 4$  时的 Wick 定理)

若  $n = 4$ , 则

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = & N \{ \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ & + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ & + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \} \end{aligned} \quad (6.96)$$

由于缩并是一个数可以提出来, 而正规编序后的算符的真空期望值为零, 因此我们有

$$\langle 0 | T \{ \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \quad (6.97)$$

**6.3.1**  $\phi^4$  理论

接下来我们讨论一个简单的 Toy model  $\phi^4$  理论, 即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (6.98)$$

考虑  $2 \rightarrow 2$  的散射过程

$$\hat{S} = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x H_{\text{int}}^I(t) \right] = 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x T [\phi^4(x)] + O(\lambda^2) \quad (6.99)$$

定义初态末态  $|p_A p_B\rangle \rightarrow |p_1 p_2\rangle$ , 则

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 | I | p_A p_B \rangle &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 \left\{ [a_2, a_A^\dagger] + a_A^\dagger a_2 \right\} a_B^\dagger | 0 \rangle \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^6 \left[ \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_2) + \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1) \right] \end{aligned} \quad (6.100)$$

由于

$$T[\phi^4(x)] = N[\phi^4(x)] + 6D_F(x-x)N[\phi^2(x)] + 3D_F(x-x)D_F(x-x) \quad (6.101)$$

则有

$$\langle p_1 p_2 | i\hat{T} | p_A p_B \rangle = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \langle p_1 p_2 | T[\phi^4(x)] | p_A p_B \rangle \quad (6.102)$$

第一项为

$$\langle p_1 p_2 | N[\phi^4(x)] | p_A p_B \rangle \quad (6.103)$$

其中每个  $\phi(x)$  中的正频部分可以和  $|p_A\rangle, |p_B\rangle$ , 缩并, 负频部分可以和  $\langle p_1|, \langle p_2|$  缩并例如,

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(x) |p_A\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} a_p e^{-ip \cdot x} 2\sqrt{E_A} a_A^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} [a_p, a_A^\dagger] e^{-ip \cdot x} 2\sqrt{E_A} |0\rangle \\ &= e^{-ip_A \cdot x} |0\rangle\end{aligned}\quad (6.104)$$

所以先可以选一个  $\phi(x)$  和  $p_A, p_B, p_1, p_2$  中一个缩并, 剩下的  $\phi(x)$  和剩下的  $p_A, p_B, p_1, p_2$  缩并, 一共有  $4!$  种情况. 所以有

$$\begin{aligned}-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \langle p_1 p_2 | N[\phi^4(x)] |p_A p_B\rangle &= -i\lambda \int d^4x e^{-ix \cdot (p_A + p_B - p_1 - p_2)} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)\end{aligned}\quad (6.105)$$

则  $im = -i\lambda$ .

而第二项只用两个  $N[\phi^2(x)]$ ,

$$\begin{aligned}T_{fi}^2 &= -i \frac{\lambda}{4!} 6 D_F(0) \int d^4x \langle p_1 p_2 | N[\phi^2(x)] |p_A p_B\rangle \\ &= -i \frac{\lambda}{4!} 2 \times 6 D_F(0) \int d^4x [\langle p_1 | N[\phi(x)\phi(x)] |p_A\rangle \langle p_2 | p_B | + \dots] \\ &= -i \frac{\lambda}{4!} 2 \times 6 D_F(0) \left[ \langle p_2 | p_B | \int d^4x e^{-i(p_1 - p_A) \cdot x} + \dots \right]\end{aligned}\quad (6.106)$$

其中  $\frac{1}{4!} 2 \times 6 = \frac{1}{2}$ , 即结构化因子, 而

$$D_F(0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_i^2 + i\epsilon}\quad (6.107)$$

是发散的, 可以用来计算自由理论的真空和相互作用理论真空能量的区别  $|0\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$ , 但对于关联函数并不贡献, 因此我们有

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}\quad (6.108)$$

可得总截面

$$\sigma = \int d\Omega \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = 4\pi \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 E_{CM}^2}\quad (6.109)$$

还需考虑全同粒子, 因此我们有

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 E_{CM}^2}.\quad (6.110)$$

我们还可以考虑更高阶的修正从而得到  $\phi^4$  理论的 Feynman 规则.

### Example 6.3.2 ( $\phi^4$ 理论的 Feynman 规则)

- (i) 每一个顶点分配一个因子  $-i\lambda$ ;
- (ii) 每一条外线对应 1;
- (iii) 每一条内线对应  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ ;
- (iv) 每一个顶点强制 4 动量守恒;

- (v) 对于每一个未被确定的 4 动量引入一个  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  的积分;
- (vi) 除以可能的对称性因子.

对于  $\phi^3$  理论, 我们有

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}} - \frac{g}{3!}\phi^3 \quad (6.111)$$

Feynman 规则与  $\phi^4$  理论基本一致, 只是顶点因子变为  $-ig$ .

## 6.4 Scalar QED

接下来我们介绍一个不那么平凡的粒子也就是标量 QED. 自由情况下的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.112)$$

将导数变为协变导数, 就得到了相互作用项

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - ie A_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi) + e^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu \quad (6.113)$$

在相互作用绘景中

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) & \phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \\ A_\mu(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \sum_\lambda (a_{\mathbf{k}}^\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}) \end{aligned} \quad (6.114)$$

为了利用 Wick 定理考虑场的缩并有

$$\overline{\phi(x)\phi^\dagger(y)} = D_F(x-y), \quad \overline{\phi(x)\phi(y)} = \overline{\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)} = 0, \quad \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = D_{F\mu\nu}(x-y) \quad (6.115)$$

考虑场和外态电子的缩并有 (+ 代表正粒子)

$$\overline{\phi(x)|\mathbf{p}^+} = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} a_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle \quad (6.116)$$

同样我们可以得到以下的缩并有

$$\overline{\phi^\dagger(x)|\mathbf{p}^-} = e^{-ip \cdot x} |0\rangle, \quad \langle \mathbf{p}^+ | \phi^\dagger(x) = \langle 0 | e^{ip \cdot x}, \quad \langle \mathbf{p}^- | \phi^\dagger(x) = \langle 0 | e^{ip \cdot x} \quad (6.117)$$

对于光子的缩并有

$$\overline{A_\mu(x)|k, \lambda} = \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} |0\rangle, \quad \langle k, \lambda | A_\mu(x) = \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x} \quad (6.118)$$

在计算振幅时平面波系数积分都会变为  $\delta$  函数, 因此我们得到了标量 QED 的内外线 Feynman 规则, 对于电子或者正电子的外线分配因子为 1, 对于入射光子分配因子为  $\varepsilon$ , 出射光子为  $\varepsilon^*$ . 内线为相应的传播子.

接下来我们考虑顶点的 Feynman 规则, 顶点如图所示

对于顶点考虑  $|e^-(p)\rangle \rightarrow |e^-(p')\gamma(k, \lambda)\rangle$  的过程, 计算  $S$  矩阵元到一阶, 有

$$\begin{aligned} \langle e^-(p')\gamma(k, \lambda) | T \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \right\} | e^-(p) \rangle &= \langle e^-(p')\gamma(k, \lambda) | T i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) | e^-(p) \rangle \\ &= e \langle e^-(p')\gamma(k, \lambda) | \int d^4 x N [A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi)] | e^-(p) \rangle \\ &= e \int d^4 x \varepsilon_\mu^{*(\lambda)}(k) e^{ik \cdot x} (e^{ip' \cdot x} e^{-ip \cdot x} (-ip^\mu) - e^{ip' \cdot x} e^{-ip \cdot x} (ip'^\mu)) \\ &= (2\pi)^4 \delta(p - p' - k) (-ie) \varepsilon_\mu^{*(\lambda)}(p + p')^\mu \end{aligned} \quad (6.119)$$

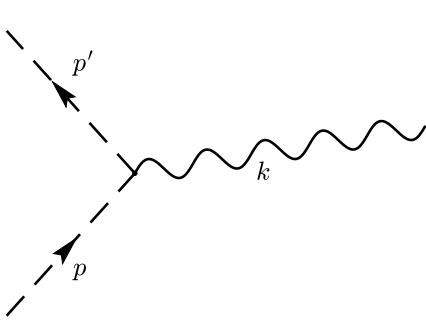


图 6.1: 标量 QED 的顶点

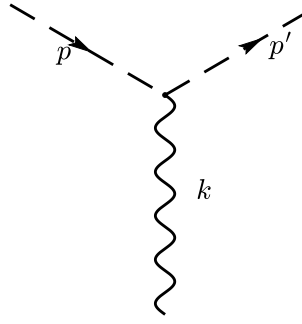


图 6.2: 标量 QED 的顶点

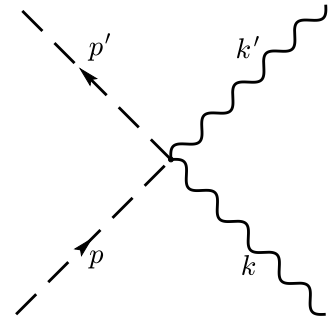


图 6.3: 标量 QED 的顶点

因此对于上图所示顶点我们的 Feynman 规则为

$$-ie(p + p')^\mu \quad (6.120)$$

动量的方向是从下到上, 而图中的箭头代表粒子流的方向, 如果粒子流的方向与动量的方向相反, 则要在相应的动量前加上一个负号如上图 2 所示, 对应的顶点写为

$$-ie(-p + p')^\mu = ie(p - p')^\mu \quad (6.121)$$

除了这样的顶点在标量 QED 中还包含一个 4 粒子相互作用顶点如图 3, 我们直接给出 Feynman 规则, 即

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu \implies 2ie g_{\mu\nu} \quad (6.122)$$

对于 QED 我们有 Ward Identity, 即对于任意的不变振幅, 我们总可以写成

$$\mathcal{M}^\mu \varepsilon_\mu(\dots) \quad (6.123)$$

的形式, 将极化矢量替换为对应光子的动量, 结果为零, 即

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 \quad (6.124)$$

## 6.5 QED 的 Feynman 规则

对于 QED 我们首先讨论 Dirac 场的 Wick 定理, 我们有编时乘积为

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (6.125)$$

对应的传播子为

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = \langle 0 | T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \quad (6.126)$$

利用 Wick 定理有

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \quad (6.127)$$

即

$$S_F(x-y) = \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \quad (6.128)$$

### 6.5.1 Yukawa 理论

我们首先考虑 Yukawa 理论即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\Gamma\psi\phi \quad (6.129)$$

同样先考虑场算符与单粒子态的缩并, 对于平面波展开我们有

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (u^s(p)a_{\mathbf{p}}^s e^{-ip\cdot x} + v^s(p)b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ip\cdot x}) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (\bar{v}^s(p)b_{\mathbf{p}}^s e^{-ip\cdot x} + \bar{u}^s(p)a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ip\cdot x}) \end{aligned} \quad (6.130)$$

同样与单粒子态缩并有

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x)|\mathbf{p}^+, s} &= u^s(p)e^{-ip\cdot x}|0\rangle, & \langle\mathbf{p}^+, s|\bar{\psi}(x) &= \langle 0|\bar{u}^s e^{ip\cdot x} \\ \overline{\psi(x)|\mathbf{p}^-, s} &= \bar{v}^s(p)e^{-ip\cdot x}|0\rangle, & \langle\mathbf{p}^-, s|\psi(x) &= \langle 0|v^s(p)e^{ip\cdot x} \end{aligned} \quad (6.131)$$

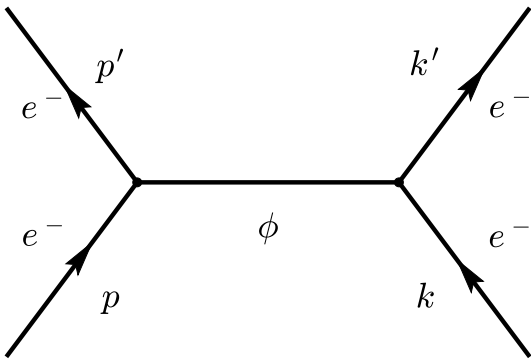


图 6.4: Yukawa 理论的树图

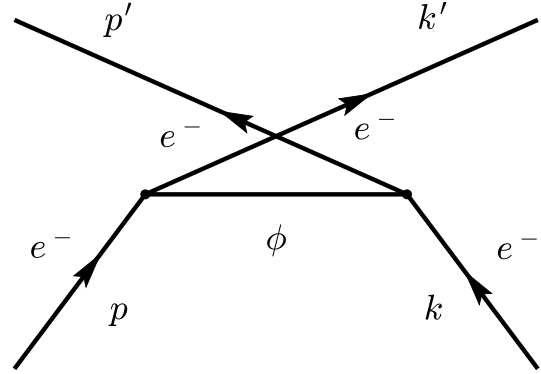


图 6.5: Yukawa 理论的树图

我们考虑这样一个过程

$$e^-(p) + e^-(k) \rightarrow e^-(p') + e^-(k') \quad (6.132)$$

对应树图阶的振幅矩阵元为

$$\langle p', k' | T \left\{ \frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}_x \Gamma \psi_x \phi_x (-ig) \int d^4y \bar{\psi}_y \Gamma \psi_y \phi_y \right\} | p, k \rangle \quad (6.133)$$

同样考虑所有可能的缩并,  $\phi$  只能与自己缩并, 得到传播子由于  $x, y$  为积分变量, 交换  $x, y$  得到同样的结果因此有重复, 这就消去了因子 2, 因此我们只需考虑  $p$  与  $\bar{\psi}_y$  缩并,  $k$  与  $\bar{\psi}_x$  缩并即可, 将初末态取为

$$|p, k\rangle \propto a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \langle p', k'| \propto \langle 0| a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'} \quad (6.134)$$

然后可以考虑  $p'$  与  $\bar{\psi}_y$  缩并, 或  $p'$  与  $\bar{\psi}_x$  缩并, 由于反对易关系二者相差一个负号, 对应如上图所示的两个过程, 对应的振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_a &= \bar{u}(k')\Gamma u(k) \frac{i}{(p-p')^2 - m^2} \bar{u}(p')\Gamma u(p) \\ i\mathcal{M}_b &= \bar{u}(p')\Gamma u(k) \frac{i}{(p-k')^2 - m^2} \bar{u}(k')\Gamma u(p) \end{aligned} \quad (6.135)$$

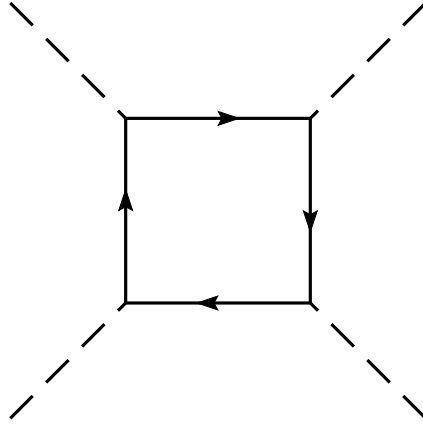


图 6.6: 标量 QED 的 Fermion 圈

二者之间有一个相对的负号这是由于 Fermion 产生湮灭算符的反对易性质所带来的. 我们还可以考虑 Fermion 圈的过程也就是  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射过程, 如图所示 我们需要考虑如下的正规编序

$$N[\bar{\psi}_x \Gamma \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \Gamma \psi_y \phi_y \bar{\psi}_z \Gamma \psi_z \phi_z \bar{\psi}_w \Gamma \psi_w \phi_w] \quad (6.136)$$

标量场与外态缩并不会带来正负号的变化, 因此只需考虑  $\psi$  的缩并, 我们有

$$\begin{aligned} N[\bar{\psi}_x \Gamma \psi_x \bar{\psi}_y \Gamma \psi_y \bar{\psi}_z \Gamma \psi_z \bar{\psi}_w \Gamma \psi_w] &= N[\bar{\psi}_x \Gamma \overline{\psi}_x \overline{\psi}_y \Gamma \overline{\psi}_y \overline{\psi}_z \Gamma \overline{\psi}_z \overline{\psi}_w \Gamma \psi_w] \\ &= -\text{Tr}[S_F(x-y)S_F(y-z)S_F(z-w)S_F(w-x)] \end{aligned} \quad (6.137)$$

负号来源于  $\psi$  的反对易关系, 移动  $\psi$  经过了奇数个交换, 因此会带来负号.

## 6.6 Spinor QED

接下来我们讨论真正的旋量 QED, 我们有相互作用项为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (6.138)$$

对于外线以及内线的 Feynman 规则与标量 QED 是一样的, 对于顶点如图所示 考虑 S 算符的一阶展开有

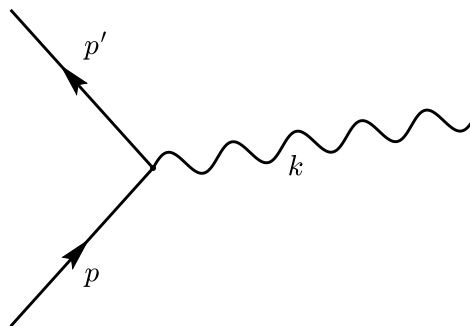


图 6.7: Spinor QED 顶点

$$\langle e\gamma | N \left[ \int d^4x (-ie) \bar{\psi}_x \gamma^\mu \psi_x A_\mu(x) \right] | e \rangle \quad (6.139)$$

可以得到顶点为  $-ie\gamma^\mu$ . 接下来我们考虑  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  过程的散射, Feynman 图如图所示 利用 Feynman

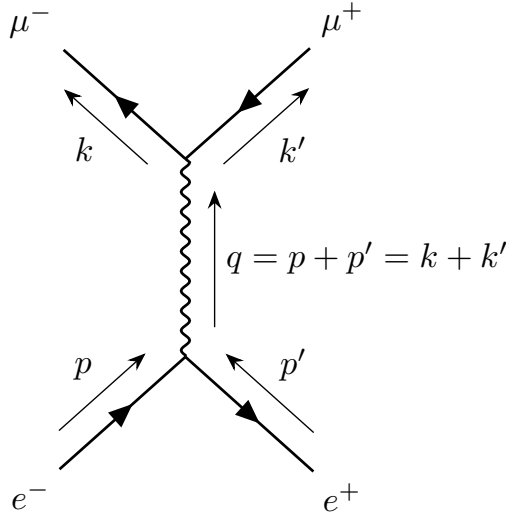


图 6.8:  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  的 Feynman 图

规则可以写出 Feynman 振幅为

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p')(-ie\gamma^\mu)u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(k)(-ie\gamma^\nu)v(k') = ie^2 \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{1}{q^2} \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \quad (6.140)$$

我们需要考虑  $|\mathcal{M}|^2$  的求和, 我们需要计算  $\mathcal{M}^*$ , 由于  $(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))$  是一个数, 因此我们有

$$(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))^* = (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))^\dagger = \bar{u}(p)\gamma^\mu v(p') \quad (6.141)$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \sum \mathcal{M}\mathcal{M}^* = \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')] [\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p') \bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)] \\ &= \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')] [\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)] \\ &= \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')] \text{Tr}[\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)] \\ &= \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu (\not{p} + m_e)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu (\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu] \end{aligned} \quad (6.142)$$

忽略电子的质量并对初态自旋求平均末态求和, 我们有

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu (\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu] \quad (6.143)$$

我们需要对 Dirac 矩阵求迹, 我们介绍几个有用的公式

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu] &= 0, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \dots] = \text{Tr}[\dots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu] \\ \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad \text{Tr}[\text{odd \# } \gamma \text{ matrices product}] = 0 \\ \text{Tr}[\gamma^5] &= 0 \quad \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4ie^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = -4ie^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (6.144)$$

除了求迹公式之外还有关于 Gamma 矩阵乘积的公式

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4\mathbf{I} & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu\end{aligned}\quad (6.145)$$

由此我们可以得到

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4s^2} 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p'] \times 4[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2)] \quad (6.146)$$

利用运动学关系

$$p^2 = p'^2 = 0, \quad k^2 = k'^2 = m_\mu^2 \quad (6.147)$$

我们可以得到

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{s^2} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2 p \cdot p'] \quad (6.148)$$

取质心系

$$p^\mu = (E, E\hat{z}), \quad k^\mu = (E, \mathbf{k}), \quad p'^\mu = (E, -E\hat{z}), \quad k'^\mu = (E, -\mathbf{k}) \quad (6.149)$$

则有

$$(p+p')^2 = s = E_{\text{CM}}^2 = 4E^2, \quad p \cdot p' = 2E^2, \quad p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}| \cos \theta, \quad p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}| \cos \theta \quad (6.150)$$

则有

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^2}{16E^4} [E^2(E - |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2] \\ &= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]\end{aligned}\quad (6.151)$$

由此我们可以得到微分截面

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{1}{2E_{\text{CM}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{CM}}} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (6.152)$$

积分可得总截面为

$$\sigma_t = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{CM}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \quad (6.153)$$

其中

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 + \cos^2 \theta \quad (6.154)$$

反映了 Helicity 结构.

对于非相对论极限, 我们有

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \xrightarrow{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E}, \quad \sigma_t = \frac{2\pi\alpha^2}{E_{\text{CM}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E} \quad (6.155)$$

## 6.7 Compton Scattering

我们接下来考虑 Compton 散射过程即

$$e^-(p) + \gamma(k) \longrightarrow e^-(p') + \gamma(k') \quad (6.156)$$

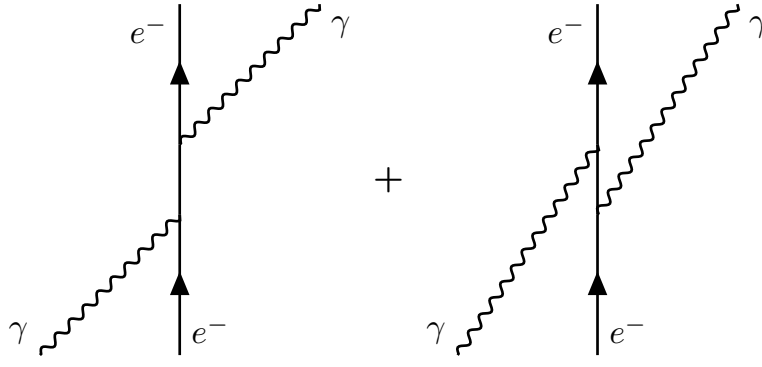


图 6.9: Compton 散射 Feynman 图

Feynman 图如图所示

利用 Feynman 规则可以写出 Feynman 振幅为 (光子出射顶点为  $-ie\gamma^\mu$ , 入射顶点为  $-ie\gamma^\nu$ )

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k')) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\nu \varepsilon_\nu(k)) u(p) \\
 &+ \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu \varepsilon_\nu(k)) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k')) u(p) \\
 &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(k') \varepsilon_\nu(k) \bar{u}(p') \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u(p)
 \end{aligned} \tag{6.157}$$

我们可以将  $\varepsilon_\nu(k) \rightarrow k_\nu$  来验证 Ward Identity. 首先我们可以利用如下关系对上式进行化简

$$\begin{aligned}
 (p+k)^2 - m^2 &= 2p \cdot k, & (\not{p} + m) \gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + m\gamma^\nu) u(p) = 2p^\nu u(p) \\
 p - k' &= p' - k, & (p-k')^2 &= (p' - k)^2 = -2p' \cdot k \\
 \bar{u}(p') \gamma^\nu (\not{p}' + m) &= \bar{u}(p') (2p'^\nu - \not{p}' \gamma^\nu + m\gamma^\nu) = \bar{u}(p') 2p'^\nu
 \end{aligned} \tag{6.158}$$

代入可得

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu^*(k') \varepsilon_\nu(k) \bar{u}(p') \left( \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{2p'^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu}{-2p' \cdot k} \right) u(p) \tag{6.159}$$

将  $\varepsilon_\nu(k) \rightarrow k_\nu$  代入可得

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu^*(k') \bar{u}(p') \left( \frac{\gamma^\mu \not{k} \not{k} + 2\gamma^\mu p \cdot k}{2p \cdot k} + \frac{2p' \cdot k \gamma^\mu - \not{k} \not{k} \gamma^\mu}{-2p' \cdot k} \right) u(p) \tag{6.160}$$

$\not{k}\not{k} = 0$  代入则有  $i\mathcal{M} = 0$ , 由此我们就验证了 Ward Identity. 为了计算振幅我们需要对光子的极化矢量求和, 利用 Ward Identity 我们可以得到如下关系

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k) = -g_{\mu\nu}. \tag{6.161}$$

## 6.8 Green Function 的微扰展开

我们定义 Green 函数为场算符的编时乘积的真空期望值

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle \tag{6.162}$$

但是 Green 函数本身并不是可观测量, 我们希望从 Green 函数中得到一些物理信息. 因此我们必须考虑相互作用, 由此我们的真空也应该是相互作用真空  $|\Omega\rangle$ , 从而 Green 函数为

$$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle \quad (6.163)$$

从 Green 函数中我们可以抽取出可观测量, 例如强子的质量, 以及利用 Green 函数计算 off-shell 的  $S$  矩阵, 利用 LSZ 约化公式, 我们可以得到相应的  $S$  矩阵元. 接下来我们将来讨论 Green 函数的微扰展开. 从两个视角来看这个问题首先是 Lagrangian 视角, 我们将要介绍 Dyson-Schwinger 方程, 然后是 Hamiltonian 视角, 我们将要介绍 Gell-Mann-Low 公式.

### 6.8.1 Dyson-Schwinger 方程

对于自由场我们有

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle, \quad (\partial_x^2 + m^2)D_F(x-y) = -i\hbar\delta^4(x-y) \quad (6.164)$$

接下来我们直接从编时乘积的定义出发计算它关于 K-G 算子的值, 即

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle \quad (6.165)$$

唯一需要注意的就是关于时间的导数, 我们有

$$\begin{aligned} \partial_{x^0} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle &= \langle 0|\partial_{x^0}(\theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y))|0\rangle + \langle 0|\partial_{x^0}(\theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x))|0\rangle \\ &= \langle 0|T\{\partial_{x^0}\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \end{aligned} \quad (6.166)$$

上式第二项实际上就是

$$\langle 0|\delta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \langle 0|[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]|0\rangle = 0 \quad (6.167)$$

因此我们有

$$\partial_{x^0} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \delta(x^0 - y^0) \langle 0|T\{\partial_{x^0}\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle \quad (6.168)$$

再次利用上述技巧我们有

$$\partial_{x^0}^2 \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \langle 0|T\{\partial_{x^0}^2\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle + \delta(x^0 - y^0) \langle 0|[\partial_{x^0}\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \quad (6.169)$$

上述第二项为

$$\delta(x^0 - y^0) \langle 0|[\partial_{x^0}\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \delta(x^0 - y^0) \langle 0|[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]|0\rangle = -i\hbar\delta^4(x-y) \quad (6.170)$$

因此我们有

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \langle 0|T\{(\partial_x^2 + m^2)\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle - i\hbar\delta^4(x-y) \quad (6.171)$$

推广到相互作用真空我们有

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|T\{(\partial_x^2 + m^2)\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-y) \quad (6.172)$$

而对于相互作用场我们有运动方程为

$$(\partial_x^2 + m^2)\phi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial\phi(x)} \equiv \mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x)) \quad (6.173)$$

因此上述公式可以写为

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|T\{\mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x))\phi(y)\}|\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-y) \quad (6.174)$$

推广到多个场算符则有 Dyson-Schwinger 方程

**Theorem 6.8.1** Dyson-Schwinger 方程

$$\begin{aligned}
(\partial_x^2 + m^2) \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T \{ \mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x)) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle \\
&- i\hbar \sum_{i=1}^n \delta^4(x - x_i) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_{i-1}) \phi(x_{i+1}) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle
\end{aligned} \tag{6.175}$$

下面我们首先介绍几个利用上述公式来计算自由场 Green 函数的例子

**Example 6.8.1** (两点关联函数)

两点关联函数为

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \int \delta^4(x - x_1) \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \tag{6.176}$$

利用

$$(\partial_x^2 + m^2) D_F(x - y) = -i\hbar \delta^4(x - y) \tag{6.177}$$

有

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{i}{\hbar} \int d^4x (\partial_x^2 + m^2) D_F(x - x_1) \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \tag{6.178}$$

然后分部积分有

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{i}{\hbar} \int d^4x D_F(x - x_1) (\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \tag{6.179}$$

利用 Dyson-Schwinger 方程 ( $\mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x)) = 0$ ), 我们有

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{i}{\hbar} \int d^4x D_F(x - x_1) (-i\hbar \delta^4(x - x_2)) = D_F(x_2 - x_1) \tag{6.180}$$

这是实际上是一个显然的结果.

**Example 6.8.2** (四点关联函数)

对于四点关联函数同样利用上述技巧

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int d^4x D_F(x - x_1) (\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle \\
&= \int d^4x D_F(x - x_1) (\delta^4(x - x_2) D_F(x_3 - x_4) + \delta^4(x - x_3) D_F(x_2 - x_4) + \delta^4(x - x_4) D_F(x_2 - x_3)) \\
&= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)
\end{aligned} \tag{6.181}$$

这也就代表了自由场的 3 种不同的 4 点图.

接下来将上述技巧运用到相互作用场中

**Example 6.8.3** ( $\lambda\phi^4$  理论)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}} - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad \mathcal{L}'_{\text{int}}(\phi(x)) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) \quad (6.182)$$

同样计算两点关联函数我们有

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int d^4x D_F(x-x_1)(\partial_x^2 + m^2) \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \int d^4x D_F(x-x_1) \left( -\frac{\lambda}{6} \langle \Omega | T\{\phi^3(x)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle - i\hbar\delta^4(x-x_2) \right) \end{aligned} \quad (6.183)$$

保留到  $\lambda$  的一阶  $|\Omega\rangle \simeq |0\rangle$ , 我们有

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle &\simeq D_F(x_1-x_2) - \frac{i\lambda}{6\hbar} \int d^4x D_F(x-x_1) \langle 0 | T\{\phi^3(x)\phi(x_2)\} | 0 \rangle \\ &= D_F(x_1-x_2) - \frac{i\lambda}{2\hbar} \int d^4x D_F(x-x_1) D_F(x-x) D_F(x-x_2) \end{aligned} \quad (6.184)$$

第二项代表了圈图的贡献, 也就是说对于相互作用场的两点关联函数, 还有自能修正. 注意  $D_F(x-y) \propto \hbar$ , 因此第一项是  $\propto \hbar$ , 第二项是  $\propto \hbar^2$ , 因此圈图展开也称为  $\hbar$  展开, 由于  $\hbar$  是一个小量, 因此这个展开是微扰展开.

对于  $\phi^3$  理论我们也可以做类似的处理.

## 6.8.2 Gell-Mann-Low 公式

接下来我们从 Hamiltonian 视角来看 Green 函数的微扰展开. Hamiltonian 可以写为

$$H = H_0 + V \quad (6.185)$$

我们首先在 Heisenberg 绘景下考虑

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x)\phi_H(y)\} | \Omega \rangle \quad (6.186)$$

计算较为困难, 我们希望在相互作用绘景下计算并且真空靠近自由场真空即

$$\phi_H(x) \rightarrow \phi_I(x), \quad |\Omega\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (6.187)$$

选取  $t_0$  时刻为参考点, 在 Heisenberg 绘景与相互作用绘景中我们有

$$\phi_H(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}, \quad \phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (6.188)$$

由此我们有

$$\phi_H(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \mathbf{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \mathbf{x}) U(t, t_0) \quad (6.189)$$

其中

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (6.190)$$

考虑  $U(t, t_0)$  随时间演化

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= -H_0 U + U H = e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} V e^{-iH(t-t_0)} = V_I(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (6.191)$$

同样利用 Dyson 级数我们有

$$U(t, t') = T \exp \left\{ -i \int_{t'}^t dt'' V_I(t'') \right\} \quad (6.192)$$

$U(t, t')$  满足如下性质

$$U(t, t) = 1, \quad U^\dagger(t, t') = U^{-1}(t, t') = U(t', t), \quad U(t, t')U(t', t'') = U(t, t''). \quad (6.193)$$

接下来我们考虑  $|\Omega\rangle$  与  $|0\rangle$  的关系, 将能量本征态记为  $|n\rangle$ , 则有本征方程

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (6.194)$$

将相互作用真空的能量记为  $E_0$  即

$$E_0 = \langle \Omega | H | \Omega \rangle \quad (6.195)$$

考虑自由真空随着时间的演化

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (6.196)$$

取  $T \rightarrow \infty$  我们可以得到自由真空和相互作用真空的关系, 但是右边第二项是高速振荡的, 因此我们添加一个指数压低因子即  $T \rightarrow (1 - i\varepsilon)\infty$ , 从而我们有

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{e^{-iHT} |0\rangle}{e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle} \quad (6.197)$$

为了应用我们之前得到的时间演化算符我们做一个改写

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{e^{iH((-T)-t_0)} e^{-iH_0((-T)-t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{U^{-1}(-T, t_0) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{U(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} \end{aligned} \quad (6.198)$$

对于  $\langle \Omega|$  同理可得

$$\langle \Omega| = \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0| U(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (6.199)$$

从而我们有

$$\begin{aligned} &\langle \Omega| T \{ \phi_H(x) \phi_H(y) \} |\Omega\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0| U(T, t_0) U^\dagger(x_0, t_0) \phi_I(x) U(x_0, t_0) U^\dagger(y_0, t_0) \phi_I(y) U(y_0, t_0) U(t_0, -T) |0\rangle}{|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0 T}} \\ &= \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0| U(T, x_0) \phi_I(x) U(x_0, y_0) \phi_I(y) U(y_0, -T)}{|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0 T}} \end{aligned} \quad (6.200)$$

由于

$$\langle \Omega|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0| U(T, -T) |0\rangle}{|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0 T}} = 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0| U(T, -T) |0\rangle = 1 = \langle 0|\hat{S}|0\rangle \quad (6.201)$$

因此我们有

$$|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0 T} = \langle 0|\hat{S}|0\rangle \quad (6.202)$$

从而有

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T \{ \phi_H(x) \phi_H(y) \} | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\langle 0 | U(T, x_0) \phi_I(x) U(x_0, y_0) \phi_I(y) U(y_0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \\
&= \lim_{T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) U_I(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \\
&= \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \hat{S} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}
\end{aligned} \tag{6.203}$$

这就是 Gell-Mann-Low 公式, 即

**Theorem 6.8.2** Gell-Mann-Low 定理

$$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x) \phi_H(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) U_I(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \tag{6.204}$$

也就是说我们将 Heisenberg 绘景中的 Green 函数转化为相互作用绘景中的 Green 函数, 然后就可以利用 Wick 定理计算.

接下来我们介绍几个利用 Gell-Mann-Low 公式计算 Green 函数的例子

**Example 6.8.4** ( $\lambda\phi^4$  理论)

对于  $\lambda\phi^4$  理论

$$\mathcal{H}_{\text{int}}^I = \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 \tag{6.205}$$

我们可以计算

$$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x) \phi_H(y) \} | \Omega \rangle \tag{6.206}$$

利用 Gell-Mann-Low 公式, 首先计算分子

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \hat{S} \} | 0 \rangle &= \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) + \phi(x_1) \phi(x_2) \left[ -i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) \right] + \dots \} | 0 \rangle \\
&= D_F(x_1 - x_2) + \langle 0 | N \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \left[ -i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) \right] \} | 0 \rangle \\
&= D_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z (D_F(x_1 - x_2) 3D_F(z - z)^2 \\
&\quad + 4 \times 3D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z))
\end{aligned} \tag{6.207}$$

上式第二项中包含一项为真空泡泡图, 但是在之前我们利用 Dyson-Schwinger 方程计算时一阶修正只包含第三项, 这是因为我们还没有考虑分母, 实际上我们可以证明分子总可以写为

$$\sum (\text{all connected diagrams with two external legs}) \times \exp \left\{ \sum (\text{all diagrams without external legs}) \right\} \tag{6.208}$$

而分母总可以写成

$$\exp \left\{ \sum (\text{all diagrams with out external legs}) \right\} \tag{6.209}$$

因此分子分母相消, 只剩下包含外腿的连通图.

下面我们考虑一下这些真空泡泡图的物理意义例如对于前式第二项中的真空泡泡图

$$\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z 3D_F^2(z-z) = \frac{-i\lambda}{8} D_F^2(0) \int d^4z \propto VT \quad (6.210)$$

也就是说真空泡泡图正比于时空体积, 之前我们得到了

$$|\langle 0|\Omega\rangle|e^{-i_2 E_0 T} = \langle 0|\hat{S}|0\rangle \quad (6.211)$$

利用能量密度

$$\varepsilon = \frac{E_0}{V} \quad (6.212)$$

上式就可以改写为

$$|\langle 0|\Omega\rangle|e^{-2i\varepsilon_0 VT} = \langle 0|\hat{S}|0\rangle \quad (6.213)$$

取对数我们有

$$\text{constant} - 2i\varepsilon_0 VT = \ln \langle 0|\hat{S}|0\rangle = \sum (\text{all diagrams with out external legs}) \quad (6.214)$$

即真空图对应真空能量.



# Chapter 7

## 重整化与紫外发散

我们首先考虑  $\lambda\phi^4$  理论, 考虑无质量极限, 即

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (7.1)$$

考虑  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  散射过程, 考虑树图阶和  $s$ -channel 的圈图, 由此有

$$i\mathcal{M}_o = -i\lambda, \quad i\mathcal{M}_s = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(k-p)^2 + i\varepsilon} \quad (7.2)$$

利用分解

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{2E_k} \left( \frac{1}{k^0 - E_k + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 + E_k - i\varepsilon} \right) \quad (7.3)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k 2E_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}} \left( \frac{1}{E_k + E_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - p^0 + i\varepsilon} + \frac{1}{E_k + E_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + p^0 - i\varepsilon} \right) \\ &\stackrel{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d|\mathbf{k}|}{2\pi^2} |\mathbf{k}|^2 \frac{1}{4|\mathbf{k}|^2} \left( \frac{1}{2|\mathbf{k}|} + \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \right) = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int^\Lambda \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{s} + \text{Imaginary Part} \end{aligned} \quad (7.4)$$

其中  $\Lambda$  为我们所取的动量截断. 我们运用了留数定理来简化积分, 接下来我们介绍两种参数化的方法.

### 7.1 Feynman 参数化

Feynman 参数化如下

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} \quad (7.5)$$

还有 Schwinger 参数化

$$\frac{1}{AB} = (-i)^2 \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt e^{i(sA+tB)} \quad (7.6)$$

利用  $s = \tau x$ ,  $t = \tau(1-x)$ , 可以得到

$$\frac{1}{AB} = (-i)^2 \int_0^1 dx \int_0^\infty d\tau \tau e^{i\tau(xA+(1-x)B)} \quad (7.7)$$

可以证明两种参数化是等价的. 利用 Feynman 参数化, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s &= -\frac{i\lambda}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(x(k-p)^2 + (1-x)k^2 + i\varepsilon)^2} \\
&= -\frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 + i\varepsilon)^2} \\
&= -\frac{i\lambda}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-xp)^2 - (-x(1-x)p^2 - i\varepsilon)]^2} \\
&= -\frac{i\lambda}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

其中

$$l = k - xp, \quad \Delta = -x(1-x)p^2 + i\varepsilon \tag{7.9}$$

利用 Wick 转动, 我们有

$$l_E = (l_E^0, \mathbf{l}_E), \quad l^0 = il_E^0, \quad l_M^2 = (l^0)^2 - |\mathbf{l}|^2 = -(l_E^0)^2 - |\mathbf{l}_E|^2 = -l_E^2 \tag{7.10}$$

于是我们有

$$\mathcal{M}_s = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \tag{7.11}$$

上式涉及到了一个 4 维 Euclidean 空间的积分, 更一般的我们可以考虑  $d$  维 Euclidean 空间的积分我们有

$$\int d^d l_E = \int d\Omega_d \int_0^\infty dl_E l_E^{d-1} \tag{7.12}$$

利用积分公式

$$(\sqrt{\pi})^d = \left( \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \Omega_d \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \tag{7.13}$$

由此我们有

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \implies \Omega_4 = 2\pi^2 \tag{7.14}$$

因此上述积分为

$$\mathcal{M}_s = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dl_E}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2 l_E^3}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{l_E^3 dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2} \tag{7.15}$$

仍旧取截断能标为  $\Lambda$  则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda \frac{l_E^3 dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \left( \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} - 1 \right) \\
&= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx (\ln \Lambda^2 - \ln(-x(1-x)s - i\varepsilon)) \\
&= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{s} \right) + \text{Finite Part}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

我们还可以利用微分方程法来求解上述积分, 由于 Lorentz 不变性,  $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_s(p^2)$ , 我们可以得到

$$\frac{d\mathcal{M}_s}{ds} = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{s} \implies \mathcal{M}_s = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln s + \text{constant}. \tag{7.17}$$

## 7.2 重整化耦合常数

我们在上述计算中得到了圈图实际上是发散的, 但是我们的可观测量是收敛的, 那么如何建立发散项与可观测量之间的联系呢, 我们可以考虑重整化耦合常数.

我们之前提到的参数  $\lambda$  都是裸参数, 并不对应任何可观测量, 我们现在在某个能标  $s_o$  下定义重整化耦合常数

$$\lambda_R = -\mathcal{M}(s_o) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} \quad (7.18)$$

也就是说  $\lambda_R$  是  $\lambda$  的级数展开, 同样我们也可以将  $\lambda$  展开为  $\lambda_R$  的级数, 设  $\lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2$ , 代入保留到二阶有

$$\lambda_R = (\lambda_R + a\lambda_R^2) + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} \implies a = -\frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} \quad (7.19)$$

我们可以得到

$$\lambda(\Lambda) = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} \quad (7.20)$$

因此

$$\mathcal{M}_s = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{\Lambda^2} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{s} \quad (7.21)$$

由此我们就消去了发散项, 也就是说我们用一个可观测量  $\lambda_R$  去表示不可观测量  $\lambda$  我们就消去了紫外发散. 在 QED 中我们有裸参数  $e, m_e$  我们同样可以用重整化参数  $e_R, m_R$  来表示, 从而消去发散项, 因此 QED 是一个可重整化的理论, 更一般的对于一个可重整化的理论其耦合常数的量纲一定非正.

此外我们还可以考虑  $\lambda(\Lambda^2)$  的导数, 我们将裸参数记为  $\lambda_B$ , 则有

$$\frac{d\lambda_B}{d\Lambda^2} = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \frac{1}{\Lambda^2} \implies \Lambda^2 \frac{d\lambda_B}{d\Lambda^2} = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \implies \frac{d\lambda_B}{d \ln \Lambda^2} = \frac{\lambda_B^2}{32\pi^2} \quad (7.22)$$

这是一个微分方程, 可以得到  $\lambda_B$  关于  $\Lambda^2$  的关系, 上式也被称为重整化群方程.

## 7.3 重整化的微扰论

在重整化的微扰论中, 我们可以添加抵消项

$$\lambda = \lambda_R + \delta\lambda \quad (7.23)$$

Lagrangian 变为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\lambda_R}{4!} \phi^4 - \frac{\delta\lambda}{4!} \phi^4 \quad (7.24)$$

此时抵消项顶点的 Feynman 规则为  $-i\delta\lambda$ , 我们可以得到

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{\Lambda^2} - \delta\lambda + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \quad (7.25)$$

利用重整化条件有

$$\lambda_R = -\mathcal{M}(s_o) \quad (7.26)$$

则有

$$-\lambda_R = \mathcal{M}(s_o) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} - \delta\lambda \implies \delta\lambda = -\frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{\Lambda^2} \quad (7.27)$$

代入则有

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_o}{s} \quad (7.28)$$

得到了与上述的微分方程的结果一致. 我们还可以定义重整化场

$$A^\mu = \sqrt{Z} A_R^\mu, \quad \psi = \sqrt{Z} \psi_R \quad (7.29)$$

## 7.4 维数正规化

我们之前用的都是硬动量截断方法, 我们首先介绍一下不同的重整化方案

(i) 硬动量截断, 即

$$\int^{\infty} d^4 l_E \rightarrow \int^{\Lambda} d^4 l_E \quad (7.30)$$

(ii) Pauli-Villars 正规化方案

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (7.31)$$

(iii) Gaussian 正规化方案

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)e^{\frac{\partial^2}{\Lambda^2}}\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^3 e^{\frac{\partial^2}{\Lambda^2}}\phi \quad (7.32)$$

(iv) Point-Splitting 正规化方案

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{3!}\phi(x - \varepsilon)\phi(x)\phi(x + \varepsilon) \quad (7.33)$$

(v) 解析正规化

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^{1+\delta}} \quad (7.34)$$

(vi) Lattice 正规化, 时空离散化 (破坏了 Lorentz 对称性, 保持了规范对称性)

(vii) 维数正规化  $d = 4 - \varepsilon, \varepsilon > 0$  对应紫外发散,  $\varepsilon < 0$  对应红外发散.

我们现在考虑维数正规化, 考虑量纲

$$[\mathcal{S}] = 0, \quad [\mathcal{L}] = d = 4 - \varepsilon \quad (7.35)$$

对于 QED 我们有

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}A\psi \quad (7.36)$$

对应的量纲为

$$[A_\mu] = \frac{d}{2} - 1 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad [\psi] = \frac{d-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad [e] = 2 - \frac{d}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.37)$$

利用维数正规化有

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \rightarrow \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (7.38)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{1}{2} dl_E^2 \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l_E^2 + \Delta)} \stackrel{x=\frac{\Delta}{l_E^2+\Delta}}{=} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \Delta + \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

# Chapter 8

## 量子场论专题

### 8.1 Cutkosky 规则

利用 Cutkosky 可以计算如下的积分

$$I = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\mu p_\nu}{(k^2 - m_1^2)(p^2 - m_2^2)} \quad (8.1)$$

利用 Cutkosky 规则有

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(I) &= -4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_\mu p_\nu (-2\pi i) \delta(p^2 - m_2^2) (-2\pi i) \delta(k^2 - m_1^2) \\ &= 4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} p_\mu p_\nu (2\pi) \delta(p^2 - m_2^2) (2\pi) \delta(k^2 - m_1^2) (2\pi)^4 \delta^4(q - p - k) \\ &= g_{\mu\nu} \int p^2 d\Pi_2 = \frac{m^2 |\mathbf{p}|}{8\pi\sqrt{s}} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.2)$$